אלגברה לינארית 1 ־ תרגול 5

21 ביולי 2020

1 הפיכות ־ המשך

תרגילים:

1. תהא $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(א) עבור אילו ערכי a המטריצה A הפיכה?

פתרון: נדרג, ונבדוק עבור אילו ערכי a המדורגת קנונית היא מטריצת היחידה:

$$1\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - aR_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-1 \\ 0 & 0 & (1 \end{pmatrix}$$

לפתרון השאלה מספיק לעצור כאן, ולוודא שאין שורת אפסים. לכן לכל $a \neq 1, -2$ המטריצה A הפיכה.

(ב) עבור איזה ערך a (אם בכלל) מתקיים:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

פתרון: נכפול את שני האגפים ב־ A ונקבל:

$$I = A^{-1}A \underset{?}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a+2 & a & a \\ a & -a+2 & a \\ a & a & -a+2 \end{pmatrix}$$

ואז עבור $a = 0$ מקבלים שיוויון.

2. עבור $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(א) מצאו מטריצה B כך ש- $AB=I$.

(ב) האם יש B יחידה שעושה זאת?

(ג) האם קיימת B כך ש- $BA=I$?

פתרון: א. נמצא $B\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ כזו. נדרוש

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&e\\b&f\\c&g\end{pmatrix}$$

לפי כפל עמודה נקבל שהעמודה הראשונה היא

$$a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

ולכן כדאי לקחת $a=c=0,b=1$, ובדומה עבור העמודה השנייה.

דרך נוספת: נמצא תחילה את ההופכית של $A'=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&-1\\1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&1&-1\end{array}\right)$$

וקיבלנו את ההופכית של החלק השמאלי $A'^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$, ולכן אם ניקח

$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\\0&0\end{pmatrix}$ אז נקבל:

$$R_1(AB)=R_1(A)\cdot B=1\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$$

עבור $A'^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}=B'$, ונקבל ש- $1\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}$ נותן את השורה העליונה ב- $A'B'$ שזו השורה העליונה של I. ולכן גם בחישוב של השורה העליונה של AB נקבל את השורה העליונה של I. בדומה:

$$R_2(AB)=R_2(A)\cdot B=1\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$$

ב. לא. נוכל למצוא את ההופכית של $A'=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-2\\0&1&-1&1\end{array}\right)$$

ונקבל את $A'^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B'$, ואז המטריצה $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

ואז

$$R_1(AB) = 1\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ובדומה עבור השורה השנייה.

ב. נניח בשלילה שיש $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ כך ש- $BA = I$. נגדיר $B' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ להיות B עם תוספת עמודת אפסים מימין, ונגדיר $A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ להיות A עם תוספת שורת אפסים למטה. שימו לב לבד שנקבל:

$$I = BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B'A'$$

בסתירה לכך שמטריצות ריבועיות עם עמודת/שורת אפסים אינן הפיכות.

2 מרחבים וקטוריים

נדבר על מרחב וקטורי V (קבוצה שאיבריה נקראים וקטורים) מעל שדה $\mathbb{F}$, עם חיבור וקטורים וכפל בסקלאר.

תרגילים:

1. האם הבאים הינם מ"ו:

(א) $V = \mathbb{R}^2$ עם חיבור רגיל וכפל בסקלאר: $\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}$?

פתרון: החיבור רגיל וראיתם שעובד. פילוג של כפל בסקלאר עם חיבור:

$$\alpha\cdot\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha z \\ y+w \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

ראיתם $\alpha u = 0$ אמ"ם $\alpha = 0 \vee u = 0$. וזה לא עובד פה כי ניתן לקחת $\alpha = 0, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ואז $\alpha u \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ בסתירה.

(ב) $V = \mathbb{R}^2$ עם חיבור רגיל וכפל: $\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 x \\ \alpha^2 y \end{pmatrix}$?

פתרון: נראה שהפילוג לא עובד:

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)^2 x \\ (\alpha+\beta)^2 y \end{pmatrix} \underset{\alpha=\beta=1}{\neq} \begin{pmatrix} (\alpha^2+\beta^2) x \\ (\alpha^2+\beta^2) y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.1 תתי מרחבים וקטוריים

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. תת־קבוצה $W \subseteq V$ תיקרא תת־מרחב וקטורי אם מתקיים:

1. $0_v \in W$
2. סגירות לחיבור: $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
3. סגירות לכפל בסקלאר: $u \in W, \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha u \in W$

ניתן לקצר את שני התנאים האחרונים לבדיקה אחת:

$$\forall u, v \in W, \alpha \in \mathbb{F} : u + \alpha v \in W$$

הערה: לכל מרחב וקטורי V מתקיים: $V, \{0\}$ הינם תתי־מרחבים. הם נקראים "הטריוויאליים".

תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו: W הוא תת־מרחב של V במקרים הבאים:

(א) $V = \mathbb{F}^{n \times n}, W = \{A \in V | A^t = A\}$

פתרון: נבדוק את התנאים: מטריצת האפס הינה סימטרית. נניח $A, B \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ אז נבדוק האם $A + \alpha B \in W$. כלומר, צריך לבדוק האם המטריצה $A + \alpha B$ סימטרית:

$$(A + \alpha B)^t = A^t + (\alpha B)^t = A^t + \alpha B^t \underset{A,B \in W}{=} A + \alpha B$$

ולכן זהו תת־מרחב.

(ב) $V = \mathbb{F}^{n \times n}, W = \{A \in V | A^t = -A\}$

פתרון: מטריצת האפסי הינה אנטי־סימטרית. ניקח $A, B \in W, \alpha \in \mathbb{F}$:

$$(A + \alpha B)^t = A^t + \alpha B^t \underset{A,B \in W}{=} -A - \alpha B = -(A + \alpha B)$$

(ג) $V = \mathbb{F}^{n \times n}, W = \{A \in V | A^t = A\} \cup \{A \in V | A^t = -A\}$. כלומר, W זה אוסף המטריצות שהן סימטריות או אנטי־סימטריות.

פתרון: ראיתם שאיחוד של תתי־מרחבים הוא תת־מרחב אמ"ם אחד מוכל בשני. וכאן אין הכלה כזו. נייש את ההוכחה מההרצאה ע"י מציאת מטריצה סימטרית שאינה אנטי־סימטרית, ומטריצה אנטי שאיננה סימטרית, ואז מתחייב (ראו

הרצאה) שהסכום לא סימטרית ולא אנטי. ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ סימטרית
שאיננה אנטי־סימטרית. ניקח $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ואז:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

שכמובן לא באיחוד.

(ד) $V = \mathbb{R}_2[x], W = \{ax^2 + bx + c \in V | b \neq 0\}$.

פתרון: פולינום האפס מקיים $b = 0$, ולכן $0 \notin W$ ולכן לא ת"מ.