קודם כל תזכורת לגבי הקומפקטיות מהרצאה 2:

משפט: כל מ"מ קומפקטי הוא שלם.

הוכחה מהירה:

לכל ס"ק (סדרת קושי) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ יש ת"ס מתכנסת ("קומפקטיות סדרתית").

אם לס"ק יש ת"ס מתכנסת, אז גם ס"ק נתונה היא מתכנסת.

עכשיו נכיר הגדרה חדשה שעוזרת להבין את הקומפקטיות.

הגדרה: (חסימות כליל)

נניח נתון $\varepsilon>0$. תת קבוצה A במרחב (X,d) נקראת ε-**צפופה** אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(a,x)<\varepsilon$.

(אומרים ש: a מקרב את x עד כדי ε)

הגדרה שקולה: $\bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a)=X$

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **חסום כליל** (totally bounded) אם:

לכל $\varepsilon>0$ נתון קיימת תת קבוצה **סופית** A_ε שהיא ε-צפופה ב (X,d).

הגדרה: תת קבוצה Y במ"מ (X,d) נקראת **חסומה כליל** אם מרחב (Y,d_Y) ח"כ.

דוגמה: $X=\mathbb{R}\supset[0,1]=Y$, אז ת"ק $A_{\frac{1}{n}}=\{\frac{i}{n}:i\in\{0,1,\cdots,n\}\}$ היא $\frac{1}{n}$-צפופה ב Y

תרגיל: ב $Y=[0,1]\times[0,1]$ למצוא ת"ק שהיא $\frac{1}{100}$-צפופה.

משפט: אם מרחב מטרי (X,d) קומפקטי אז הוא חסום כליל.

הוכחה: לכל $\varepsilon>0$ נתון לכיסוי פתוח $\bigcup_{a\in X} B_\varepsilon(a)=X$ יש תת כיסוי סופי.

(כאן משתמשים בקומפקטיות "במובן הכיסויים": לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי)

דוגמה: (X,d_Δ) תמיד חסום אבל לא ח"כ עבור X אינסופית.

<u>תכונות:</u>

- מרחב חסום כליל הוא תמיד חסום (אבל לא תמיד ההפך).
- (תושתיות) אם (X,d) חסום כליל אז גם כל תת קבוצה ח"כ.
- איחוד **<u>סופי</u>** של תת קבוצות שכל אחת ח"כ גם ח"כ.
- אם תת מרחב מטרי (Y,d_Y) של מ"מ (X,d) ח"כ אז גם הסגור $cl(Y)$ ח"כ.

הגדרה: תת קבוצה Y במרחב X נקראת צפופה אם $cl(Y)=X$.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שתנאים הבאים שקולים:

1. תת קבוצה Y צפופה ב (X,d).
2. תת קבוצה Y ε-צפופה ב (X,d) לכל $0<\varepsilon$.
3. $d(x,Y)=0 \quad \forall x\in X$.

<u>דוגמה:</u> $Y=\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ חסום אבל לא ח"כ (ולא קומפקטי) ב $X=l_2$.

<u>תרגיל:</u> תנו דוגמאות של מ"מ ח"כ שהוא לא קומפקטי.

<u>Spoiler</u>: מ"מ הוא קומפקטי אם"ם הוא ח"כ ושלם (משפט שנוכיח בהמשך).

<u>תזכורת:</u> השלמה $(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p}) \hookleftarrow (\mathbb{Z},d_p)$ כאשר:

$$\overline{\mathbb{Z}}=\{\text{מספרים } p-\text{אדיים}\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k \,,\, b_k\in \underbrace{\{0,1,\dots,p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p}=\mathbb{Z}_p\right\}$$

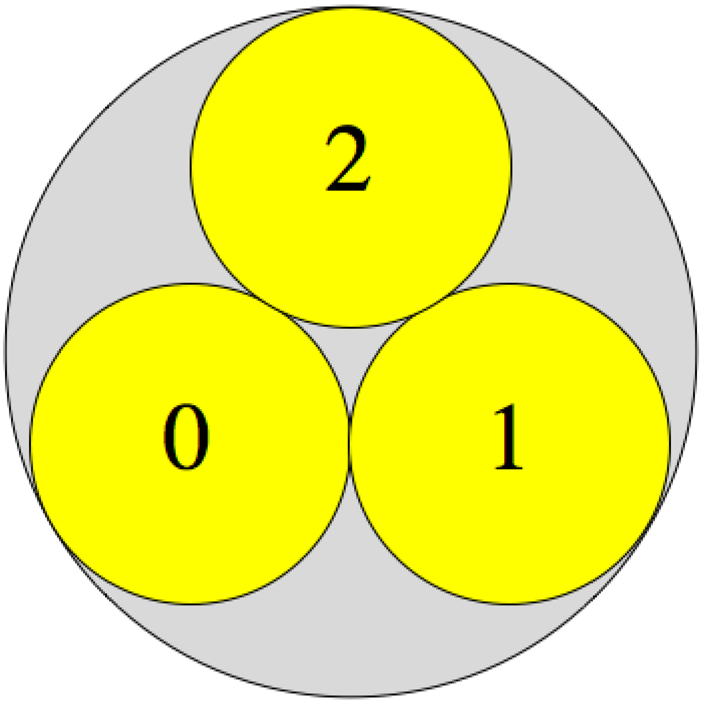
שהוא גם קומפקטי (ראו את הממשפט מ Spoiler !)

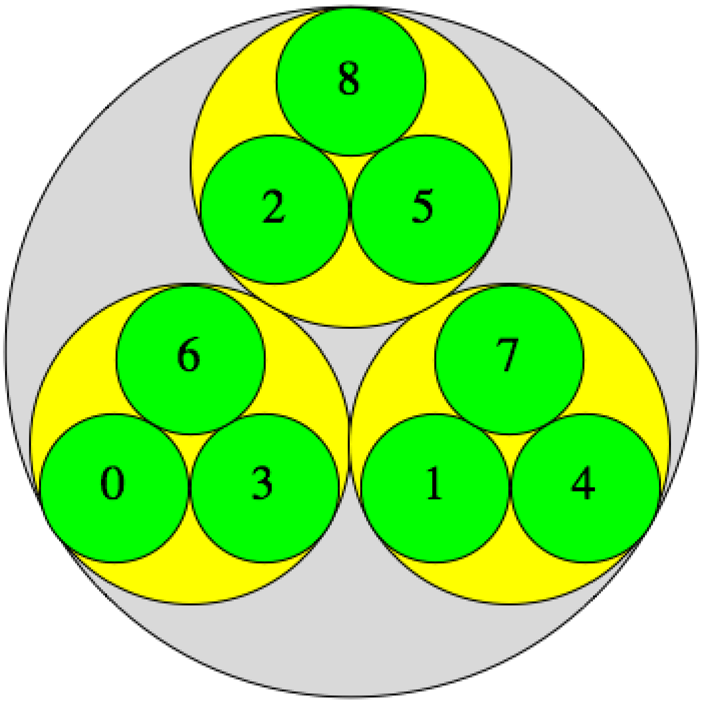
<u>תרגיל:</u> הוכיחו שמ"מ $(\mathbb{Z},d_p)$ חסום כליל ולא קומפקטי.

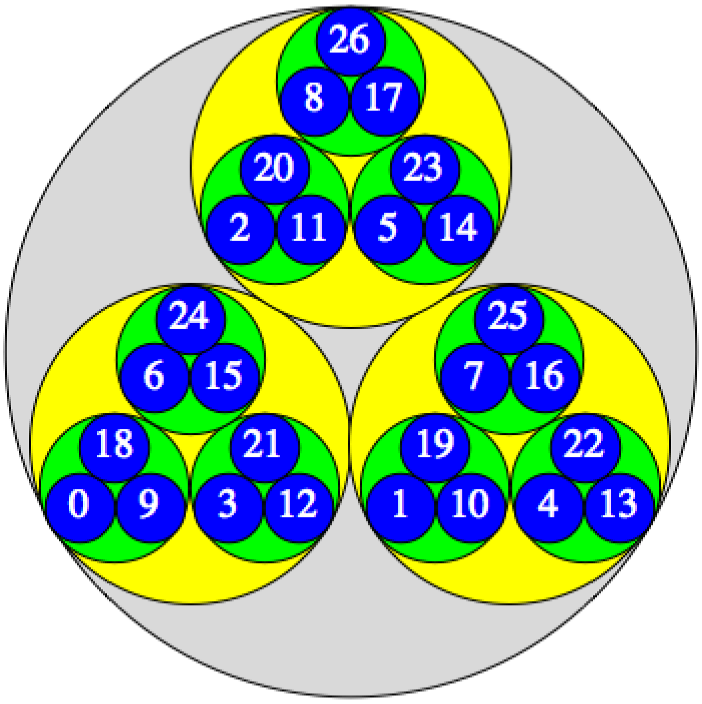
<u>הסבר מקוצר:</u> לא קומפקטי כי המרחב לא שלם. למשל הסדרה $a_n=1+p+p^2+\cdots+p^n$ היא ס"ק אבל לא מתכנסת (תרגול).

רמז לגבי ח"כ: תת קבוצה $\{0,1,\cdots,p^k-1\}$ היא ε-צפופה עבור $\varepsilon=?$

ראו תמונות במקרה של $p=3$


2
0
1


8
2
5
6
7
0
3
1
4



ת"ק $\{0\}$ ε-צפופה לכל $1<\varepsilon$

ת"ק $A:=\{0,1,2\}$ ε-צפופה לכל $\frac{1}{3}<\varepsilon$

הסבר: שאריות מודולו 3 הן בדיוק $A=\{0,1,2\}$.

לכן לכל $x\in\mathbb{Z}$ קיים $a\in A$ כך ש $3|(x-a)$. מכאן $d_3(x,a)\le\frac{1}{3}$.

. . .

<u>שאלה</u>: כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p})$ לפי התמונות הנ"ל ?

מרחבים טופולוגיים

הגדרה: תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות $\tau \subseteq P(X) := \{A | A \subseteq X\}$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה X** אם מתקיימים התנאים הבאים:

t_1) $\emptyset, X \in \tau$.

t_2) (חיתוכים סופיים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in \{1,2,\dots,n\} \Leftarrow O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in \tau$

(מספיק עבור $n = 2$).

t_3) (איחודים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in I \Leftarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש - (X, τ) הוא **מרחב טופולוגי** ($Topological\ space$) ונרשום בקיצור מ"ט.

הגדרות נוספות:

א) אומרים ש - $A \subseteq X$ היא תת קבוצה **פתוחה** (במ"ט (X,τ)) אם –

$$\boxed{A \in \tau \overset{def}{=} \text{פתוחה } A}$$

ב) תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קב' **סגורה** (במ"ט (X,τ)) אם המשלים פתוחה, ז"א –

$$\boxed{A^c \text{ פתוחה} \overset{def}{=} A \text{ סגורה}}$$

דוגמאות:

1) לכל מרחב פסאודו-מטרי (X, d): $(X, top(d))$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

כאשר $top(d) = \{\text{קבוצות פתוחות במובן } d\}$.

הגדרה: אומרים שמ"ט (X,τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש $\boxed{\tau = top(d)}$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי **פסאודו-מטריזבילי**

משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות): לכל מ"ט (X, τ) מתקיים:

t_1^c) $X, \emptyset$ סגורות.

t_2^c) איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.

t_3^c) כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.

הוכחה: כללי $de\ Morgan \wedge$ הגדרת TOP.

2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} \coloneqq \{\emptyset, X\}$. (X, τ_{tr}) **מרחב טריוויאלי**.

הערה: מ"ט (X, τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = top(d_0)$. כאשר $d_0(x, y) = 0$.

3) "**טופולוגיה דיסקרטית**": $\tau_{discr} \coloneqq P(X) = \{X - \text{תת קבוצות ב}\}$

(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה)

שימו לב: בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל t_3).

הגדרה: נקודה a במרחב טופולוגי (X, τ) נקראת **מבודדת** $(isolated)$ אם $\{a\} \in \tau$ (פתוח!).

לכן: מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי $\Leftrightarrow$ כל נקודה מבודדת בו.

הערה:

מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ (d_Δ מטריקת 0-1).

הערה: לכל טופולוגיה τ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

הגדרה: נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה X. אז אומרים ש - τ_2 **חזקה** יותר מ - τ_1, ואומרים ש - τ_1 **חלשה** יותר מ - τ_2.

4) $X = \{0,1\}$ ונגדיר – $\tau_{\leq} \coloneqq \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ טופולוגית Sierpinski

$\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ לא.

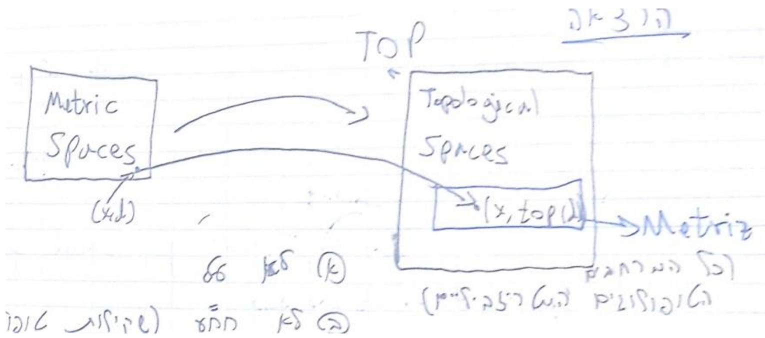
הגדרה (תת מרחב טופולוגי): יהי $(X, \tau) \in TOP$, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

מגדירים **טופולוגית תת מרחב** מעל Y:

$$\tau_Y := \{O \cap Y | O \in \tau\}$$

תבדוקו ש - $(Y,\tau_Y) \in TOP$.

הערה:

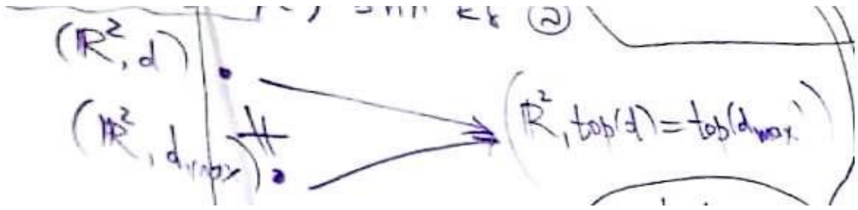


$$\{metric\ spaces\} = Metr \to TOP = \{topological\ spaces\}, (X,d) \mapsto (X, top(d))$$

א) לא על.

ב) לא חח"ע.

הסבר ב': (שקילות טופולוגית של מטריקות)



הסבר א': שקול להגיד, שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

דוגמה:

$X := \{0,1\}$. $(X,\tau_{\le})$ מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!)..

$$\tau_{\leq} = \left\{\underbrace{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}}_{\text{פתוחות}}\right\}. \qquad \left\{\underbrace{\{0,1\}, \{1\}, \emptyset}_{\text{סגורות}}\right\}$$

<u>הסבר:</u>

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה ρ על $\{0,1\}$ כך ש – $top(\rho) = \tau_{\leq}$.

<u>הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי:</u> $(\{0,1\}, \tau_{\leq}) \notin Metriz$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח ש - $(\{0,1\}, \tau_{\leq})$ לא פסאודו-מטריזבילי – נניח בשלילה ש

<u>2 מקרים:</u>

1) $\rho(0,1) = 0$ ואז $\rho = d_0$. מצד שני, $\tau_{\leq} \neq top(d_0) = \{\emptyset, \{0,1\}\}$.

2) $\rho(0,1) > 0$. כאן – $\tau_{\leq} \subsetneq top(\rho) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X \neq \emptyset$ נגדיר – $\underset{cofinite}{\tau_{\underbrace{cof}}} := \{F^c : \text{סופית } F \subseteq X\} \cup \{\emptyset\}$

לבדוק: (τ_{cof}, X) מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

<u>הערה:</u>

$$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) = \{F^c \subseteq \mathbb{R} \,|\, \text{סופית } F \subset \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \notin Metriz$$

<u>רמז:</u> לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

<u>הגדרות:</u>

יהי (X, τ) מ"ט.

1) תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה לנק' $a \in X$** אם קיימת קבוצה פתוחה O $(\in \tau)$

כך ש – $a \in O \subseteq V$.

נסמן – $V \in N(a)$, כאשר $N(a)$ סביבות של a.

אומרים **סביבה פתוחה** אם V פתוחה.

<u>אזהרה:</u> <u>סביבה</u> לא חייבת להיות פתוחה.

2) באופן דומה נגדיר **סביבה V לתת קבוצה $A \subseteq X$** אם –

$$\exists O \in \tau : A \subseteq O \subseteq V$$

3) אומרים שנקודה a היא **נק' פנימית** של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in int(A)$ או $a \in A^{\circ}$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של A: $int(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

<u>הערה:</u> תמיד $int(A) \subseteq A$.

<u>טענה:</u> $int(A) = A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{קריטריון לפתיחות}} A$ פתוחה $(A \in \tau)$.

רמז: שימוש ב t_3 .

<u>הגדרה:</u> X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

<u>הגדרה:</u>

4) **הסגור - closure**: עבור $A \subseteq X$ נגדיר:

$$z \in cl(A) = \bar{A} \overset{def}{=} \forall V \in N(z) : V \cap A \neq \emptyset$$

$z \in cl(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל – A.

<u>הערה:</u> תמיד $A \subseteq cl(A)$.

<u>תרגיל:</u> $A = cl(A) \Leftrightarrow A$ סגורה.

<u>הערה חשובה:</u> הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים ε-סביבות בסביבות. למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

התכנסות סדרות:

$\mathbb{N} \xrightarrow{f} X \quad n \mapsto f(n) = x_n$

לסדרה x_n במ"ט (X,τ) מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש - $a \in X$ **גבול** של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) U של a

כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה U. ז"א

$\forall U \in N(a)\, \exists n_0 \in N(a):\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$ (n_0 תלוי בסביבה U)

סימון: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ או $x_n \xrightarrow{\tau} a$.

רציפות פונקציות:

נייח $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מ"ט. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת רציפה *בנקודה* $a \in X$ אם:

$\forall U \in N(f(a))\, \exists V \in N(a)\ \ f(V) \subseteq U$

אומרים *רציפה* אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$. סימון: $f \in C(X,Y)$.

הערה: (כמו במ"מ) פונקציה $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ בין 2 מ"ט **רציפה** אם"ם

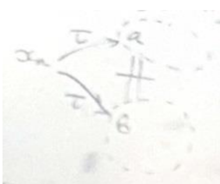
$$\boxed{\forall O \in \sigma: f^{-1}(O) \in \tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור). נוכיח בהמשך.

משפט: (יחידות הגבול) במרחב טופולוגי (X,τ) עם תכונה T_2 $(Hausdorff)$, גבול של סדרה תמיד יחיד (אם קיים!).

הוכחה:

נניח בשלילה ש – $\begin{cases} a \neq b \\ X \in T_2 \end{cases}$



$\Leftarrow$ קיימות סביבות זרות $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש - $U \cap V = \emptyset$.

U מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n, וגם V מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה ..

סתירה!

■

הגדרה: $A \subseteq X$. נגדיר את **הסגור הסדרתי** לפי:

$$z \in scl(A) \overset{def}{=} \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A: a_n \overset{\tau}{\to} z$$

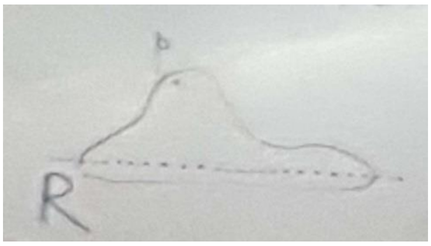
- תמיד $A \subseteq scl(\mathrm{A})$ (רמז: סדרות קבועות)
- **טענה:** במ"ט תמיד $scl(\mathrm{A}) \subseteq cl(\mathrm{A})$.

הוכחה: נניח $z \in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z.
לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U. אז ברור $U \cap A \neq \varnothing$.
לכן $z \in cl(A)$.

☺

- הערה חשובה: אבל **לא תמיד** יש שוויון $scl(\mathrm{A}) = cl(\mathrm{A})$

דוגמה: נגדיר $X := \mathbb{R} \cup \{p\}, p \notin \mathbb{R}$



$$\tau := \{O \subseteq X | p \in O \Rightarrow |O^c| \leq \aleph_0\}$$

ז"א אם $p \in O$, אז המשלים O^c הוא בן מנייה.
לבדוק:

- $(X, \tau) \in TOP$ (לבדוק גם T_2).
- שימו לב: תת מרחב טופולוגי $Y := (\mathbb{R}, \tau_Y)$ של מ"ט הנ"ל
  נקבל $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה <u>דיסקרטית</u>. ז"א $\tau_Y = P(\mathbb{R}) = \tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R} = scl(\mathbb{R}) \neq \mathrm{cl}(\mathbb{R}) = \mathrm{X}$
- אם סדרה a_n מתכנסת ב (X, τ) אז היא קבועה לבסוף
- $id: (X, \tau) \to (X, \tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה !
- $(X, \tau) \notin Metriz$

אקסיומות הפרדה נוספות:

הגדרות: נניח $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. אומרים:

א) קיימת **הפרדה סביבתית** של A, B (במ"ט (X,τ)) אם –

$$\exists\, U \in N(A), V \in N(B): U \cap V = \emptyset$$

(ז"א אם קיימות סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות).

ב) קיימת **הפרדה פונקציונלית** במובן $Urysohn$ אם:

$$\exists f \in C(X,[0,1]): f(A) = 0, f(B) = 1$$

טענה: מהפרדה פונקציונלית נובעת הפרדה קבוצתית.

הוכחה:

ניקח סביבות פתוחות זרות של 0,1 ב - $[0,1]$.

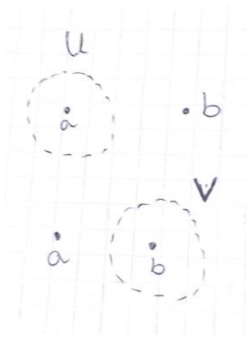
$$\underbrace{U := \left[0, \frac{1}{3}\right)}_{0\in} \cap \underbrace{V := \left(\frac{2}{3}, 1\right]}_{1\in} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של A, B.

■

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_0**, כלומר: $(X,\tau) \in T_0$ $(Kolmogorov)$ – אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:



1) $\exists U \in N(a): b \notin U$

או

2) $\exists V \in N(B): a \notin V$

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_1**,

כלומר: $X \in T_1$ – אם מתקיימים שתי התנאים מקודם ($(1) + (2)$).

תרגיל: התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in T_1$

2) כל נקודון סגור.

3) כל תת קבוצה סופית F היא סגורה. (רמז: (t_2^c))

הערה:

תמיד $\left(X,\tau_{cof}\right) \in T_1$, בעצם τ_{cof} טופולוגיה הכי קטנה על X שמקיימת את תכונה T_1.

הגדרה (תזכורת): X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_3**, כלומר: $X \in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B $a \notin$ יש הפרדה סביבתית.

הערה: $T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$ (רמז: ניקח נקודון $B := \{b\}$ ...)

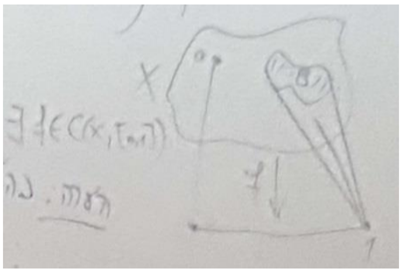
הערה:

אומרים גם: $T_3 = Regular\ spaces$, ולעיתים T_3(ב) $= Regular$

הגדרה: X מקיימת **תכונה $T_{3\frac{1}{2}}$**, כלומר: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב)^f לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B $a \notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.



הערה: מהטענה $\Leftarrow$ $T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}}$.

הערה:

1) $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff.

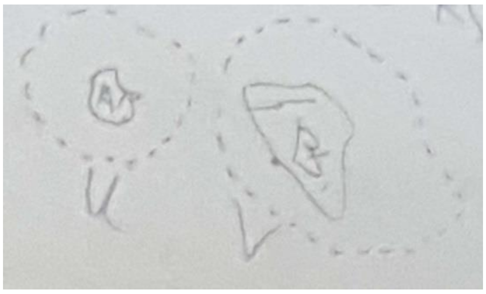
2) לעיתים על $T_{3\frac{1}{2}}$(ב)^f אומרים – Completely Regular = *רגולרי לחלוטין.*

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_4**, כלומר: $X \in T_4$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $\exists\, U \in N(A), \exists\, V \in N(B): U \cap V = \emptyset$).



הערה:

1) לעיתים אומרים $Normal\ Space$ = מרחב נורמלי.

2) ולעיתים אומרים נורמלי על (ב) T_4 בלבד.

הערה: לא קל להבין מדוע – $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

משפט *Urysohn*: יהי $X \in T_4$. אז לכל זוג A, B קבוצות <u>סגורות</u> <u>זרות</u> קיימת הפרדה פונקציונלית של A, B.

הערה: החלק הלא טריוויאלי (1) ⇐ (2): $"Onion\ Argument"\ of\ Urysohn$.

הערה: $TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4$

Spoiler : בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metriz$ $\quad$ $T_4 \supset Comp \cap T_2$

הערה:

לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות **ממש**).

ראו קובץ באתר של המרצה - $Separation\ Axioms$.

1) $(\{0,1\}, \tau_{tr}) \in Top$
$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \notin T_0$

2) $(\{0,1\}, \tau_{\leq}) \in T_0$

$(\{0,1\}, \tau_{\leq}) \notin T_1$

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1$

$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$

כאשר: $\tau_{cof} := \{F^c \mid \text{סופית } F \subseteq \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$

הערה: $(X,\tau_{cof}) \notin T_2$ לכל X אינסופית.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

$U,V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי –

$$U := F_1^c, V := F_2^c$$

ולכן – $\underbrace{=}_{\text{אם נניח}}$ $\emptyset \underbrace{=}_{\text{אם נניח}} U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$

אז – $X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}}$

בסתירה!

■

הגדרות: נניח (X,τ) מ"ט.

א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא **פירוק טופולוגי** אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – **סגוחות** (ז"א סגור+פתוח).

ב) אומרים (X,τ) **קשיר** $(Connected)$ ונסמן: $(X,\tau) \in Conn$ אם **לא** קיים פירוק טופולוגי ל- X.

הערה: (X,τ) **לא קשיר** אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגוחה לא ריקה ששונה מ X.

תרגיל: הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (כמרחב טופולוגי) הוא לא קשיר.

הגדרה: נניח $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2) \in TOP$ כך ש - $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$.

מגדירים **סכום טופולוגי** $X = X_1 \sqcup X_2$ כקבוצה $X = X_1 \cup X_2$ עם טופולוגיה הבאה

$$\tau := \{O_1 \cup O_2 | O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב הסכום תמיד לא קשיר.