מבוא לאנליזה מתקדמת - תרגול 4

11 בנובמבר 2020

שאלה בסגנון של בגרות:

1. $w = r\text{cis}\theta$ הוא מספר מרוכב המקיים: $w + \frac{1}{w} = 2\cos\theta$.

(א) הוכיחו:

i. $|w| = 1$.

פתרון: $\frac{1}{w} = \frac{\text{cis}0}{r\text{cis}\theta} = \frac{1}{r}\text{cis} - \theta$. כדי לחבר צריך לפתוח:

$$2\cos\theta = w + \frac{1}{w} = (r\cos\theta + \frac{1}{r}\underbrace{\cos -\theta}_{=\cos\theta}) + (r\sin\theta + \frac{1}{r}\underbrace{\sin -\theta}_{=-\sin\theta})i =$$

$$= (r + \frac{1}{r})\cos\theta + (r - \frac{1}{r})\sin\theta i$$

עכשיו נעשה השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 2\cos\theta = (r + \frac{1}{r})\cos\theta & Re \\ 0 \cdot \sin\theta = (r - \frac{1}{r}) \cdot \sin\theta & Im \end{cases}$$

נחלק למקרים:

אם $\cos\theta = 0$ מהמשוואה הראשונה לא ניתן לחלץ כלום, אבל נקבל $\sin\theta = \pm 1$, ולכן במשוואה השנייה נקבל $0 = \pm(r - \frac{1}{r})$ כלומר: $r = \frac{1}{r}$,
ומכאן: $r = \pm 1$ וכיון שהוא אי־שלילי נקבל $r = 1$.
אחרת, ניתן לחלק את המשוואה הראשונה ב־ $\cos\theta$ ונקבל

$$2 = r + \frac{1}{r} \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

בכל מקרה, קיבלנו $r = 1$ ולכן: $|w| = r = 1$.

ii. $\forall n \in \mathbb{N} : w^n + \frac{1}{w^n} = 2\cos(n\theta)$.

פתרון: נשתמש בדה־מואבר:

$$w^n + \frac{1}{w^n} = \text{cis}n\theta + \text{cis}(-n\theta) =$$

דרך א' (בעזרת הכלל: $(z+\overline{z}=Re(z)$. נשים לב שמתקיים: $\text{cis}-n\theta=\overline{\text{cis}n\theta}$, כלומר, $\frac{1}{w^n}=\overline{w^n}$, ולכן:

$$w^n+\frac{1}{w^n}=w^n+\overline{w^n}=2Re(w^n)=2\cos n\theta$$

דרך נוספת, בעזרת זהויות זוית שלילית:

$$=(\cos n\theta+\cos(-n\theta))+i(\sin n\theta+\sin(-n\theta))$$

שוב, בעזרת זהויות על זוית שלילית הסינוסים מצטמצמים והקוסינוסים מתחברים, ונקבל:

$$=2\cos n\theta$$

(ב) נסמן ב־A את w בעל זוית $-\frac{\pi}{2}$. משולש שו"צ חסום במעגל היחידה, ואחד הקודקודים הוא A.

i. מצאו את שני הקודקודים הנוספים.

פתרון: שלושת הקודקודים על מעגל היחידה, וכיון שמדובר במשולש זו"צ, הם מחלקים את המעגל לשלושה חלקים שווים, שהמרחק בין כל שניים הוא $\frac{2\pi}{3}$. לכן נקבל את הקודקודים:

$$B=\text{cis}(-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}),C=\text{cis}(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6})$$

ii. נסמן ב־w_1 את קודקוד המשולש הנמצא ברביע השני. פתרו את המשוואה $z^3=w_1(\cos 330+i\sin 330)$. שלושת הפתרונות מהווים שלושה איברים ראשונים בסדרה הנדסית (הראשון ברביע הראשון, והשני ברביע השני). מספר איברי הסדרה הוא n. עבור אילו ערכים של n סכום הסדרה הוא אפס?

פתרון: נפתור את המשוואה:

$$z^3=\underbrace{(\text{cis}\frac{5\pi}{6})}_{=w_1}(\text{cis}\frac{11\pi}{6})=\text{cis}\frac{16\pi}{6}=\text{cis}\frac{8\pi}{3}=\text{cis}(\frac{2\pi}{3}+2\pi k)$$

ולכן

$$z_k=\text{cis}(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3})$$

ולכן נקבל:

$$z_0=\text{cis}(\frac{2\pi}{9})$$

$$z_1 = \text{cis}\frac{8\pi}{9}$$

$$z_2 = \text{cis}\frac{14\pi}{9}$$

כעת המנה: $q = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$ (כי הרי הוספנו את הזוית הזו, לפי דה־מואבר).
ניעזר בסכום סדרה הנדסית:

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1} = \text{cis}\frac{2\pi}{9} \cdot \frac{\text{cis}\frac{2\pi n}{3} - 1}{q-1}$$

כדי לקבל 0 דרוש:

$$\text{cis}\frac{2\pi n}{3} = 1 = \text{cis}0$$

הדבר נכון לכל $n = 3k$ כי נקבל כפולה של 2π, השקולה לזוית 0.