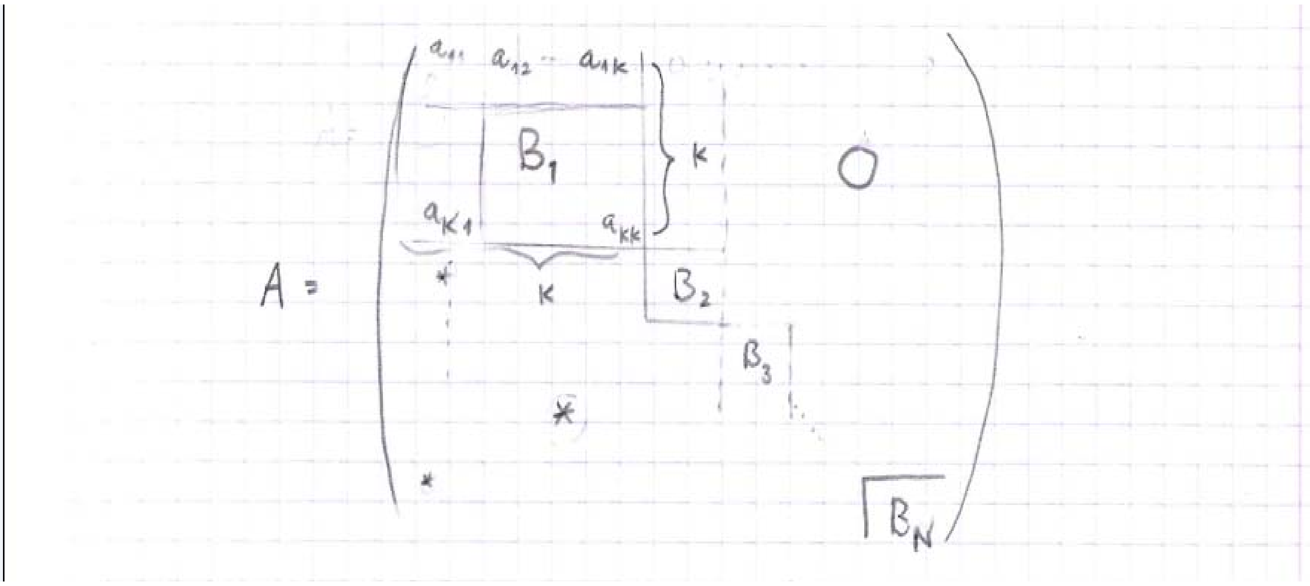
<u>פיתרון לתרגיל מספר 5</u>

<u>תשובה 1:</u>

$$P(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix} t-2 & 3 \\ -5 & t-1 \end{vmatrix}=t^2-3t+17$$

$$P(t)=\begin{vmatrix} t-1 & -6 & 2 \\ 3 & t-2 & 0 \\ 0 & -3 & t+4 \end{vmatrix}=t^3+t^2+8t+62$$

<u>תשובה 2:</u>



כאן המטריצה A היאמטריצת בלוקים, שגודלה $n \times n$ עם הבלוקים $B_1, \dots, B_N$ על אלכסונה ו- * מסמנת איבר כשלהו בשדה.

אם נפתח את הדטרמיננטה של המטריצה A לפי השורה הראשונה $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}, 0,0,\dots,0)$ נקבל ש

$$\textbf{(1)} \quad detA = a_{11}detA_1' + \cdots + (-1)^{1+k}a_{1k}detA_k'$$

באשר A_i' עבור $i=1,\dots,k$ היא מטריצת הבלוקים המתקבלת ע"י הוצאת השורה הראשונה והעמודה ה-k מהמטריצה A. נסמן ב- B_{1i}' את הבלוק (מגודל $(k-1)\times(k-1)$) המתקבל כאשר מוציאים מ- B_1 את השורה הראשונה $(a_{11},\dots,a_{1k})$ והעמודה ה- i . שימו לב, זהו בידיוק הבלוק השמאלי העליון של המטריצה A_i' . עפ"י הנחת האינדוקציה (על גודל המטריצה) $detA_i' = detB_{1i}'detB_2 \cdots detB_N$ עבור $i=1,\dots,k$. לכן ממשוואה **(1)** לעיל נקבל (ע"י הצבה) ש

$$detA = \left(a_{11}detB_{11}' + \cdots + (-1)^{1+k}a_{1k}detB_{1k}'\right)detB_2 \cdots detB_N$$

נתבונן בבלוק B_1 כמטריצה בפני עצמה. לפי פיתוח לפי השורה הראשונה

$$detB_1 = a_{11}detB_{11}' + \cdots + (-1)^{1+k}B_{1k}'$$

לכן נקבל ש $detA = detB_1\, detB_2 \cdots detB_N$ כדרוש.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ב) עתה, נחשב את הפולינום האופייני של המטריצה

עפ"י חלק (א)

$$\Delta_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4-\lambda & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \big((2-\lambda)(4-\lambda)-5\big)\big((6-\lambda)(3-\lambda)-10\big) = -\lambda^4 + 15\lambda^3 - 80\lambda^2 - 18\lambda + 56$$

ג) אם A מטריצת בלוקים משולשית עם בלוקים $B_1, \dots, B_N$ על האלכסון

אזי

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} B_1 - \lambda I_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & B_N - \lambda I_N \end{vmatrix} \quad (*)$$

כאשר I_k $1 \le k \le N$ היא בלוק היחידה מהסדר של הבלוק B_k.

עפ"י חלק (א)

$$(*) = |B_1 - \lambda I_1| \cdots |B_N - \lambda I_N| =$$

$$= \Delta_{B_1}(\lambda) \cdots \Delta_{B_K}(\lambda)$$

לכן הפולינום האופייני של מטריצה A שווה למכפלת הפולינומים האופייניים

הבלוקים באלכסונה A.

תשובה 3:

תהי A מטריצה ממשית אזי הפולינום האופייני $f_A(t) = |A - tI|$ הוא פולינום עם מקדמים ממשיים. נניח ש a_1 ערך עצמי (מרוכב) של A . אזי a_1 הוא שורש של הפולינום האופייני $f_A(t)$ דהינו $|A - a_1 I| = 0$. יהי v_1 וקטור עצמי המתאים ל- a_1.

מאחר ש $|A - \overline{a_1} I| = |\bar{A} - \overline{a_1 I}| = |\overline{A - a_1 I}| = \overline{|A - a_1 I|} = \bar{0} = 0$

נובע ש $a_2 = \overline{a_1}$ ג"כ ע"ע של A. הסבר למעברים משמאל לימין: מאחר ו-המטריצות A, I ממשיות הן שוות ל $\bar{A}, \bar{I}$ (המטריצות שרכיביהן צמודים מרוכבים של אברי A, I בהתאמה). כמו כן עבור שני מרוכבים a, b מתקיים $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ ו- $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$. לכן מיידית מפיתוח הדטרמיננטה נובע $|\overline{A - a_1 I}| = \overline{|A - a_1 I|}$. עתה , מאותם שיקולים שפורטו לעיל נובע ש

$$0 = \bar{0} = \overline{(A - a_1 I) v_1} = (\bar{A} - \overline{a_1 I}) \overline{v_1} = (A - \overline{a_1} I) \overline{v_1} = (A - a_2 I) \overline{v_1}$$

לכן $v_2 = \overline{v_1}$ ו"ע המתאים לע"ע $a_2 = \overline{a_1}$.

תשובה 4:

נתבונן במטריצה
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ & & \vdots & & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

נתבונן בסכום $a_1 + \rho a_2 + \cdots + \rho^{n-1} a_n$ המתקבל ע"י הכפלת ווקטור השורה הראשונה $R_1 = (a_1, \ldots, a_n)$ בוקטור $v = (1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1})$. אם נכפילו ב- ρ נקבל (זיכרו $\rho^n = 1$):

$$\rho \cdot (a_1 + \rho a_2 + \cdots + \rho^{n-1} a_n) = \rho a_1 + \rho^2 a_2 + \cdots + \rho^{n-1} a_{n-1} + \rho^n a_n =$$

זהו בידיוק הווקטור המתקבל כתוצאה מהכפלת ווקטור השורה השניה $R_2 = (a_n, \ldots, a_{n-1})$ בוקטור v. באופן דומה מקבלים ש $R_i v = \rho^{i-1} \cdot (R_1 v)$ עבור השורה ה – i , R_i באשר $i = 1, \ldots, n$. לכן

$$Av = (R_1 v, \ldots, R_n v)^T = (R_1 v, \rho R_1 v, \ldots, \rho^{n-1} R_1 v)^T = (R_1 v)(1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1})^T = .$$

שימו לב ש $R_1 v = a_1 + \rho a_2 + \cdots + \rho^{n-1} a_n$ הוא סקלר! לכן מהמשוואה האחרונה, עפ"י ההגדרה, v ו"ע של A ו- $(R_1 v)$ הע"ע המתאים לו.

תשובה 5:

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} \lambda & a & & & \\ & \lambda & a & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda & a \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

צ"ל: עבור $k<n$ ל-N^k יש 1-ים באלכסון ה-k-י מעל האלכסון הראשי ו-0 בשאר המקומות.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על k (כאשר $k<n$):

א. בדיקת נכונות הטענה עבור $k=1$:

עבור $k=1$, כי פשוט המטריצה N בעצמה ובה אכן יש 1-ים באלכסון הראשון מעל האלכסון הראשי ו-0 בשאר המקומות.

ב. הנחת נכונות הטענה עבור $m=k<n$ (m מס' טבעי כלשהו):

$$[\vec{e}_i=(0,..0,\overset{\text{המקום ה-}i}{1},0..0)] \qquad N^m=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overset{\text{המקום ה-}m+1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{e}_{m+1} \\ \vdots \\ \vec{e}_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ג. הוכחת נכונות הטענה עבור $k=m+1<n$:

$$N^{m+1}=N\cdot N^m=\begin{pmatrix} \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \\ 0 \end{pmatrix}\cdot N^m \underset{\text{לפי כפל שורה-שורה}}{=} \begin{pmatrix} \vec{e}_2\cdot N^m \\ \vdots \\ \vec{e}_n\cdot N^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{לפי משפט} \\ \vec{e}_iA=R_i(A)\text{ -ש} \\ \text{[מאלגברה לינארית I]}}}{=} \begin{pmatrix} R_2(N^m) \\ \vdots \\ R_n(N^m) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=$$

$$\overset{\substack{\text{לפי הנחת} \\ \text{האינדוקציה}}}{=}\begin{pmatrix} \vec{e}_{m+2} \\ \vdots \\ \vec{e}_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overset{\text{המקום ה-}m+2}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ד. משפט סיכום- בדקתי את נכונות הטענה הנ"ל עבור $k=1$. הנחתי את נכונות הטענה עבור $m,k=m<n$ מס' טבעי כלשהו. הוכחתי את נכונות הטענה עבור $k=m+1<n$, ולכן עפ"י משפט האינדוקציה הטענה נכונה לכל $k<n$.

כעת נראה ש- $N^n=0$:

$$N=\begin{pmatrix}\vec{e_2}\\ \vdots\\ \vec{e_n}\\ 0\end{pmatrix} \qquad N^n=N\cdot N^{n-1}$$

לפי מה שהוכחתי קודם (ח-1אח)

$$N^{n-1}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\ \vdots&&&0\\ \vdots&&&\vdots\\ 0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$N^n=\begin{pmatrix}\vec{e_2}\\ \vdots\\ \vec{e_n}\\ 0\end{pmatrix}\cdot N^{n-1}=\begin{pmatrix}\vec{e_2}N^{n-1}\\ \vdots\\ \vec{e_n}N^{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_2(N^{n-1})\\ \vdots\\ R_n(N^{n-1})\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}=0$$

לפי כפל שורה-שורה

מטריצת האפס

$$\Downarrow$$

$$\underline{N^n=0}$$

עבור $m(t)=(t-\lambda)^n$ נקבל עפ"י מה שהוכח בסעיף הקודם

$$m(A)=(A-\lambda I)^n=(aN)^n=a^nN^n=a^n\cdot 0=0$$

הפולינום האופייני של M הוא $f_M(t)=|tI-M|=(t-\lambda)^n$ וזהו בידיוק $m(t)$.