אבנר סופר

אוניברסיטת תל אביב

מבוא לפיזיקה מודרנית

מבוא לתורת הקוונטים

קוונטיזציה של אור, קרינת גוף שחור

הפיזיקה של סוף המאה ה-19 היתה מדע מבוסס.

הצירוף של מכניקה ניוטונית והאלקטרומגנטיות של מקסוול פתר כמעט כל בעיה יסודית.

הגלים האלקטרומגנטיים שנחזו ע"י מקסוול הוכחו נסיונית ע"י הרץ (Hertz).

היה מובן שגלים אלקטרומגנטיים נובעים ממטענים שנעים בתאוצה הלוך ושוב (אוסצילטורים), ושתדירות הגל שווה לתדירות התנודה של המטענים.

זימן (Zeeman) הדגים זאת ע"י ההפרדה (splitting) של הקוים הספקטרלים (צבעי האור) כאשר החומר המאיר היה בשדה מגנטי, ולורנץ הסביר את האפקט באמצעות מטענים קשורים רוטטים.

אבל זימן השתמש בגזים אשר להם ספקטרום בעל קוים – אורכי גל מסוימים שבהם הקרינה חזקה הרבה יותר מאשר בשאר אורכי הגל (בדומה לנורת ניאון או נורת נתרן בעלת אור צהוב).
קרינה כזו התאימה למודל של מטענים שהם אוסצילטורים (כמו מסות טעונות על קפיץ) בעלי תדירות קבועה (שתלויה במסה ובקבוע הקפיץ). למשל, אוסצילטור כזה יכול להיות אלקטרון שלילי שקשור לגרעין חיובי, או שני אטומים במולקולה פולרית (בה אחד האטומים קצת יותר חיובי והשני קצת יותר שלילי).

היה קשה יותר להסביר את הספקטרום הרציף של קרינת גוף שחור (כגון נורת להט).

פרופ' אבנר סופר, אוניברסיטת תל אביב © כל הזכויות שמורות

הקדמה מתימטית: התפלגויות

כדי להתקדם בהבנת קרינת גוף שחור, עלינו ללמוד בקצרה מספר נושאים בפיזיקה סטטיסטית שהיו ידועים היטב כבר במאה ה-19.

התפלגות:

נתאר לעצמנו משתנה X ואוכלוסיה $\{X_i\}$ של ערכים של משתנה זה, כאשר $i = 1\ldots N_i$.

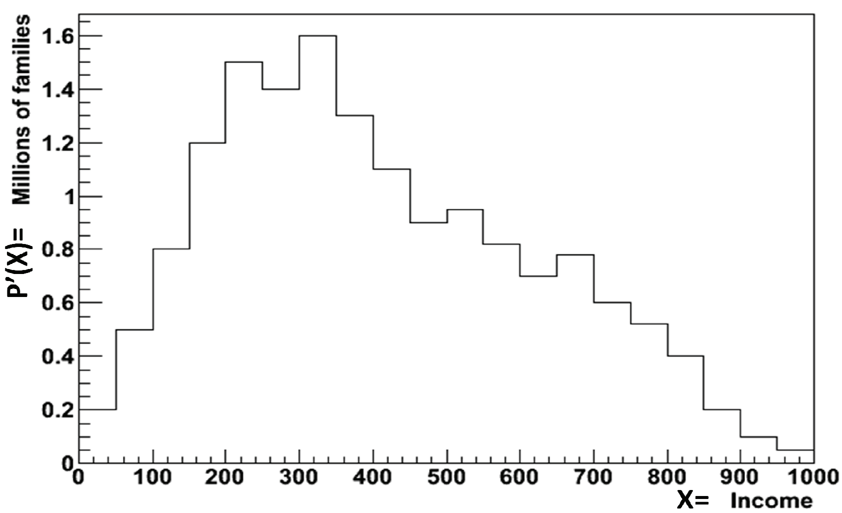
למשל:

- X רציף (ממשי):
  - X הוא גובה, והאוכלוסיה היא הגבהים של כל הסטודנטים בכיתה.
  - X הוא אנרגיה קינטית, והאוכלוסיה היא האנרגיה הקינטית של כל מולקולות האויר בחדר.
- X דיסקרטי (טבעי):
  - X הוא מספר ילדים במשפחה, והאוכלוסיה היא מספר הילדים בכל משפחה ממשפחות תל אביב.
  - X הוא הכנסה משפחתית, והאוכלוסיה היא ההכנסות המשפחתיות של כל המשפחות במדינה.

כאשר האוכלוסיה גדולה, לא מעשי לתאר את האוכלוסיה ע"י אוסף **כל** המספרים $\{X_i\}$.

אז שימושי יותר לתאר את **התפלגות הערכים** באוכלוסיה: $P'(X)$.

למשל, הנה התפלגות ההכנסה השבועית במדינה פיקטיבית מסוימת:



למשל, רואים של-1.6 מיליון משפחות יש הכנסה שבועית בין 300 ל-350 זהובים, בשעה שרק ל-0.2 מיליון משפחות יש הכנסה של 0-50 או של 850-900 זהובים בשבוע.

מאחר שכל משפחה במדינה מיוצגת בגרף זה, סכום המספרים בכל ה-bins בגרף זה שווה למספר המשפחות במדינה.

אבל אנו לא נתענין במספר המשפחות, אלא רק בהתפלגות – בצורה של גרף ההכנסות.

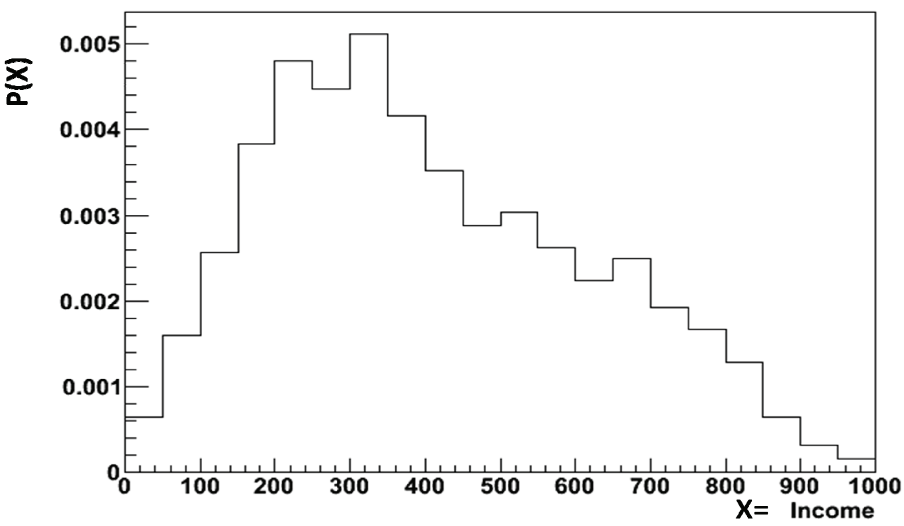
לכן נרצה להשתמש בהתפלגות $P(X)$ ש"מנורמלת" כך שסכום הערכים השונים שב-bins (בתאים) של ההתפלגות תמיד שווה ל-1, כלומר

$\sum_{b=1}^{N_b} P(X_b) = 1$, כאשר N_b הוא מספר ה-bins.

נקבל את ההתפלגות המנורמלת (נקרא לה פשוט "ההתפלגות") מתוך ההתפלגות הבלתי מנורמלת על-ידי

$$P(X_b) \equiv \frac{P'(X_b)}{\sum_{b=1}^{N} P'(X_b)}.$$

לאחר הנרמול, כך נראית התפלגות המשכורות באותה מדינה:

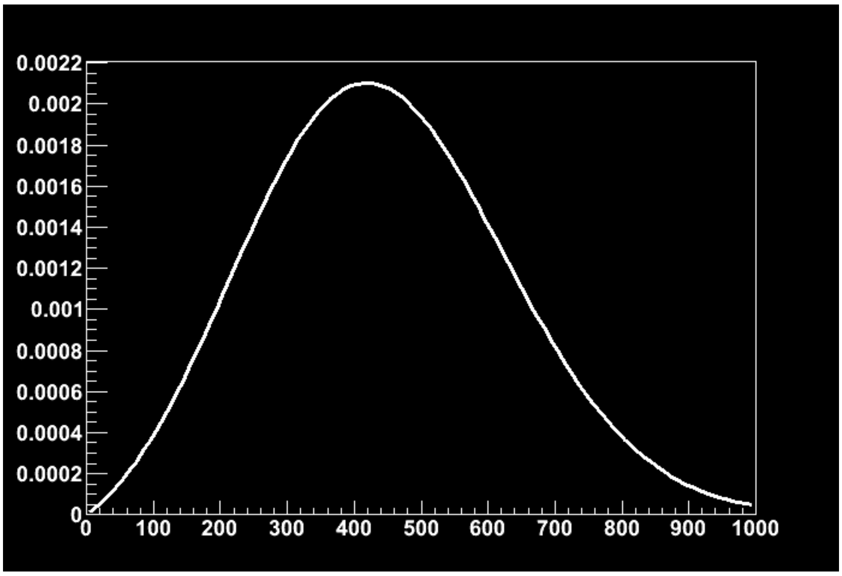


אי אפשר לדעת מזה לכמה משפחות יש הכנסה של 300-350 זהובים, אבל רואים שחלקן באוכלוסיה הוא 0.51%.

אז רואים כי:

ערך פונקצית ההתפלגות $P(X)$ הוא ההסתברות שלמשפחה אקראית תהיה הכנסה בין X ל- **$X+\Delta X$,** כאשר ΔX הוא רוחב ה-bin.

באותה צורה ניתן לתאר התפלגויות של משתנה ממשי, כגון האנרגיה של חלקיקים (שיכולה לקבל כל ערך, בניגוד להכנסה שהיא בזהובים שלמים). למשל:



במקרה זה, ההתפלגות מנורמלת כך ש- $\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} P(X)dX = 1$,

משמעות ההתפלגות הרציפה: **$P(X)$ היא ההסתברות למצוא ערך בין X ל-$X+dX$.**

<u>חישוב ממוצע:</u>

ההתפלגות מאפשרת לחשב כל גודל שתלוי ב-X ומאפיין את האוכלוסיה.

למשל, כדי למצוא את ההכנסה הממוצעת, נבצע את החישוב הבא:

$$\overline{X} = \frac{\text{סכום ההכנסות}}{\text{מספר המשפחות}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_i} X_i}{N_i} = \frac{\sum_{b=1}^{N_b} P'(X_b)X_b}{\sum_{b=1}^{N_b} P'(X_b)}$$

כאשר בשוויון השני השתמשנו בכך שמאחר ש- $P'(X_b)$ הוא מספר המשפחות עם הכנסה בתחום $[X_b, X_b+\Delta X]$, אז $P'(X_b)X_b$ הוא סכום ההכנסות של משפחות אלה.

כעת נשתמש בכך ש- $P(X_b) = \frac{P'(X_b)}{\sum_{b=1}^{N_b} P'(X_b)}$,

ונקבל שההכנסה הממוצעת היא $\bar{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i P(X_i)$.

עבור התפלגות של משתנה רציף, $\bar{X} = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} X\, P(X)$.

בצורה דומה אפשר למצוא את הממוצע של פונקציה כלשהי של X:

עבור משתנה דיסקרטי: $\bar{f} = \sum_{i=1}^{N} f\left(X_i\right) P(X_i)$.

עבור משתנה רציף: $\bar{f} = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} f\left(X\right) P(X)$

התפלגות בולצמן (Boltzmann):

התפלגות חשובה בפיזיקה היא ההתפלגות של האנרגיה E של גופים במערכת הנמצאת בטמפרטורה T (למשל, האוכלוסיה היא האנרגיות של מולקולות בגז, אטומים במוצק, וכו').

בשיטות של מכניקה סטטיסטית, שהיו ידועות היטב בסוף המאה ה-19 (ושתלמדו בקורס פיזיקה תרמית), ניתן להראות שהתפלגות זו היא

$$P(E) = Ce^{-E/kT} ,$$

כאשר מקדם בולצמן $k = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K^\circ}$ נותן את הקשר בין ממדים של אנרגיה וטמפרטורה (כשם שמהירות האור נותנת את הקשר בין מרחק וזמן),

ומקדם הנורמליזציה הוא

$$C = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-E/kT} dE} = \frac{1}{kT}$$

אז יוצא שהאנרגיה הממוצעת היא $\overline{E} = \int_0^\infty EP(E)dE = kT$

שאלת בית: הוכיחו את האינטגרלים של תנאי הנורמליזציה ושל האנרגיה הממוצעת.

הקדמה על גלים

כבר דיברנו מעט על גלים ועל תכונותיהם. כעת אנו זקוקים להבנה קצת יותר פרטנית של גלים.

כזכור, גל הוא פונקציה שפותרת את משוואת הגלים, $\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{dt^2} = 0$

(כאשר השתמשנו בסימון $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$),

כאשר c היא מהירות הפאזה של הגל (מהירות האור (קול) אם מדובר בגלי אור (קול), וכו').

במימד אחד, המשוואה היא $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{dt^2} = 0$.

פונקצית הגל ψ מתארת – בכל מקום ובכל זמן – את האמפליטודה של הגל:

במימד אחד, למשל גל במיתר, $\psi(x,t)$ היא ההזזה של המיתר במקום וזמן מסוימים.

בגלי ים, $\psi(x, y, t)$ היא גובה פני המיים בנקודה ובזמן מסוימים.

בגלי קול, $\psi(x, y, z, t)$ היא לחץ האויר במקום וזמן מסוימים.

בגל אלקטרומגנטי (אור, וכו'), $\psi(x, y, z, t)$ היא עוצמת השדה המגנטי והשדה החשמלי.

גל שמתאפס על השפה:

נתבונן **בגלים חד-ממדיים במיתר בעל אורך L קבוע משני קצותיו**

(כבמיתר של כינור, גיטרה, וכו'):

אילו גלים יכולים להיות בו? אילו פונקציות מתארות את אותם גלים ברגע מסוים בזמן?

ברור כי הפונקציה המתארת את הגל חייבת להיות כזו שקצות המיתר אינם זזים (**תנאי השפה**).

למשל, פונקציה כזו יכולה להיות מהצורה

$\sin\frac{n\pi x}{L}$ (כי תנאי השפה מתקיימים משום ש- $\sin 0=0$ וגם $\sin(n\pi)=0$), עבור כל n שלם.

כמו כן, מצפים שהתלות בזמן תהיה גם היא סינוסואידלית, כלומר מהצורה $\sin\frac{2\pi\, ct}{\lambda}$,

כאשר λ הוא פרמטר שאח"כ יתברר כאורך הגל.

לכן נציע שהפתרון הוא $\psi=\psi_0\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{2\pi\, ct}{\lambda}$,

כאשר ψ_0 היא אמפליטודת הגל.

אם הצבת הפתרון המוצע במשוואה נותנת שוויון נכון, אז זהו באמת פתרון טוב.

נשים לב כי

$$\frac{\partial^2\psi}{dt^2}=-\left(\frac{2\pi\, c}{\lambda}\right)^2\psi,\qquad \frac{\partial^2\psi}{dx^2}=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\psi,$$

אז הצבת הפתרון במשוואה נותנת

$$-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\psi+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\psi=0$$

מאחר שבאופן כללי, $\psi\neq 0$, אז רואים שהפתרון אכן עובד, כאשר אורך הגל הוא $\lambda=2\frac{L}{n}$.

אז נציב זאת בפתרון המוצע, שהופך להיות $\psi(x,t)=\psi_0\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi\, ct}{L}$.

כדי להבין את המשמעות של λ, נשתמש ביחס $\lambda=2\frac{L}{n}$ כדי לבטא את הפונקצית הגל

באמצעות λ במקום באמצעות L:

$$\psi(x,t)=\psi_0\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi\, ct}{\lambda}.$$

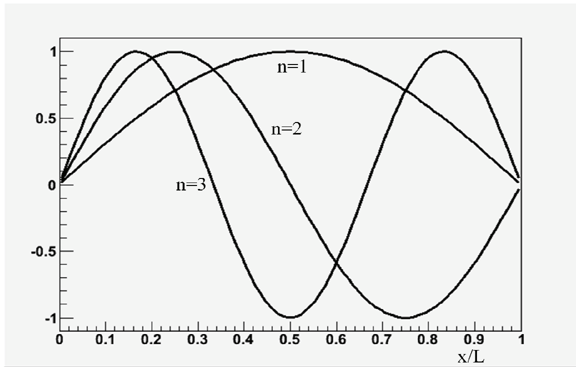
מהחלק המרחבי של הפונקציה, $\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$, רואים שהפונקציה חוזרת על עצמה כל פעם ש-x

משתנה בכפולה שלמה של λ.

כלומר, λ הוא אורך הגל, המרחק שמתאר את המחזוריות של הפונקציה.

אם כך, מצאנו פתרון למשוואת הגלים עם תנאי השפה הנתונים.

נתבונן רגע בצורה המרחבית של הפתרון (כלומר, בזמן t מסוים) עבור ערכים שונים של n:



מהציור רואים שלמיתר ישנם כל מיני **אופני תנודה** אפשריים.

לכל אופן יש ערך שונה של **מספר האופן** n.

מהציור אפשר לראות את **אורך הגל** של כל אופן.

אורך הגל הוא המרחק שעבורו הפונקציה והנגזרת שלה חוזרות לאותו ערך. אפשר לראות כי

- אורך הגל של האופן בעל n=1 הוא 2L
- אורך הגל של האופן בעל n=2 הוא L
- אורך הגל של האופן בעל n=3 הוא (2/3) L

ובקיצור, אורך הגל נתון ע"י הפרמטר $\lambda = 2\dfrac{L}{n}$, אותו קיבלנו ע"י הצבת הפתרון המוצע במשוואת הגלים.

לסיכום, לכל אופן יש מספר אופן ואורך גל, המקיימים את הקשר $\lambda = 2\dfrac{L}{n}$.

שאלת בית: אנו פתרנו את הבעיה של מיתר אחוז בשני קצותיו, כך שפונקצית הגל צריכה להתאפס שם. ניתן להראות שאם המיתר חופשי בקצותיו, אז הנגזרת של פונקצית הגל מתאפסת בקצוות, משום שקצה חופשי אינו מפעיל כוח על המיתר. כתבו את פונקצית הגל המקיימת תנאי

זה, הציבו אותה במשוואה כדי להראות שהיא פתרון, ומצאו מתוך כך את הקשר בין אורך הגל למספר הגל. הראו ששוב מתקבל הקשר $\lambda = 2\frac{L}{n}$.

<u>עקרון הסופרפוזיציה:</u>

כזכור, אמרנו שמכך שמשוואת הגלים לינארית בפונקצית הגל ובנגזרותיה

נובע כי אם ψ_1 וגם ψ_2 הן פתרונות של משוואת הגלים (כלומר, פונקציות שעבורן המשוואה נכונה), אז גם הפונקציה $\psi=\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2$ היא פתרון. כלל זה נקרא **עקרון הסופרפוזיציה.**

בשל עקרון זה, גלי קול בעלי תדירויות שונות (מוזיקה) יכולים להתקיים בו-זמנית, וכן גם גלי אור (צבעים שונים בו-זמנית).

פרוש הדבר הוא שבאותו מיתר יכולים להתקיים בו-זמנית מספר בלתי מוגבל של גלים בעלי אופני תנודה (מספרי אופן ואורכי גל) שונים, כאשר לכל אופן ישנה אמפליטודה משלו.

למעשה, ניתן להראות (אנליזת פורייה) כי כל פונקציה המקיימת את תנאי השפה שכתבנו ניתנת לכתיבה כקומבינציה לינארית (סכום) של כל האופנים השונים, כאשר לכל אופן אמפליטודה ψ_n כלשהי:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi ct}{L}$$

זהו הגל הכללי ביותר שיכול להתקיים במיתר שאחוז בקצותיו.

ראו צילום איטי של דוגמה של גל כזה:

http://www.acoustics.salford.ac.uk/feschools/waves/bungyvideo2.htm

<u>צפיפות מספר האופנים עבור n גדול:</u>

נתבונן באופן מסויים (שיקרא "האופן הראשון") בעל מספר אופן $n>>1$ ואורך גל $\lambda = 2\frac{L}{n}$.

ונתבונן באופן אחר ("האופן השני") בעל אורך גל $\lambda+d\lambda$, כאשר $\lambda>> d\lambda$.

נסמן את מספר האופן של האופן השני ע"י $n + dn$, כאשר $n >> dn$.

שאלה: כמה אופנים נמצאים בתחום אורכי הגל [λ , λ + dλ]?

כלומר, כמה אופנים dn נמצאים בין האופן הראשון לאופן השני?

תשובה:

אפשר למצוא את dn בשיטות של חדו"א, כל זמן שאנו בתחום $n >> dn >> 1$:

(**שימו לב** כי תנאי זה, פירושו שאנו עוסקים באופנים בעלי L>>λ)

מאחר ש- $n = 2\frac{L}{\lambda}$, אז $dn = \left|\frac{dn}{d\lambda}\right| d\lambda = 2\frac{L}{\lambda^2}d\lambda$.

<u>**הגדרה:**</u> **צפיפות האופנים היא מספר האופנים ליחידת אורך-גל,** $\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|$ **.**

לדוגמה, ראינו שבמקרה של גל חד-ממדי שמתאפס בקצות המיתר, $\left|\frac{dn}{d\lambda}\right| = 2\frac{L}{\lambda^2}$.

מספר האופנים באינטרוול אורכי גל dλ הוא $\left|\frac{dn}{d\lambda}\right| d\lambda$

כדי לא להיות תלויים במיתר בעל אורך מסוים, אנו נרצה את **צפיפות האופנים ליחידת אורך** של המיתר, כלומר:

$$\left|\frac{d^2n}{d\lambda dL}\right| = \frac{2}{\lambda^2}.$$

רעיון צפיפות האופנים יהיה חשוב בהמשך הדיון על קרינת גוף שחור.

<u>**אותה בעיה ב-3 ממדים:**</u>

כעת נפתור את אותה בעיה בשלושה מימדים, למשל עבור גל קול בתיבה ריבועית בעלת צלע באורך L ונפח $V=L^3$.

משוואת הגלים היא $\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{dt^2} = 0$, ושוב נדרוש שפונקצית הגל מתאפסת על דפנות התיבה. (במקרה של גלי קול, זה נובע מזה שממש בסמוך לדופן התיבה, חיכוך עם הדופן מונע ממולקולות האויר לנוע).

נציע פתרון שמקיים את תנאי השפה: $\psi = \psi_0 \sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L}\sin\frac{n_z\pi z}{L}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}$,

כאשר ψ_0 היא אמפליטודת הגל.

כמו במקרה החד-ממדי, בהצבת הפתרון במשוואה נשים לב כי

$$\frac{\partial^2\psi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2\psi \qquad \frac{\partial^2\psi}{dx^2} = -\left(\frac{n_x\pi}{L}\right)^2\psi,$$

אז ע"י הצבת הפתרון המוצע במשוואה, מקבלים

$$\frac{n_x^2}{L^2}+\frac{n_y^2}{L^2}+\frac{n_z^2}{L^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{2c}{\lambda}\right)^2$$

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2.$$

אם תנאי זה מתקיים אז הפתרון שהצענו הוא נכון.

שאלת בית: מהו הקשר בין אורך הגל λ למספרי האופן n_x, n_y, n_z אם לתיבה צלעות באורכים שונים L_x, L_y, L_z?

שוב, רק אורכי הגל הדיסקרטיים המקיימים את תנאי השפה שפונקצית הגל מתאפסת על דפנות התא נותנים פתרון לבעיה הפיזיקלית הנתונה.

שימו לב כי ב-3 ממדים, כל **אופן מוגדר ע"י שלושה מספרים:** $\mathbf{n_x}$ **,** $\mathbf{n_y}$ **,** $\mathbf{n_z}$.

הפתרון הכללי הוא קומבינציה לינארית מהצורה

$$\psi = \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty} a_{n_x n_y n_z}\psi_{n_x n_y n_z}(\vec{r},t)$$

כאשר $a_{n_x n_y n_z}$ הם מקדמים כלשהם שמתארים את האמפליטודה של האופן שמספרי האופן שלו הם n_x, n_y, n_z,

ושפונקצית הגל שלו היא $\psi_{n_x n_y n_z}(\vec{r},t) \equiv \sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L}\sin\frac{n_z\pi z}{L}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}$.

צפיפות האופנים ב-3 ממדים:

כאמור, צפיפות מספר האופנים הוא מספר האופנים שניתן להכניס במרווח מסוים $d\lambda$, חלקי $d\lambda$.

אז נמצא כמה אופנים ניתן להכניס בין λ ל- $\lambda+d\lambda$.

בממד אחד, קיבלנו את צפיפות האופנים ע"י גזירת המשוואה $\lambda = 2\frac{L}{n}$.

אבל כעת יש לנו את המשוואה $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2$ במרחב התלת-ממדי (n_x, n_y, n_z).

אז הבעיה קצת יותר מסובכת מבחינה גיאומטרית, ולכן יעזור אם נראה מה היא מתארת.

השוו משוואה זו למשוואה $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, שכולם מזהים בתור משוואת קליפה כדורית בעלת רדיוס r.

לכן, ברור כי $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2$ היא המשוואה של קליפה כדורית בעל רדיוס $r=2L/\lambda$ בקואורדינטות (n_x, n_y, n_z).

מאחר ש-n_i יכולים לקבל רק ערכים חיוביים בבעיה שלנו, הקליפה מכילה רק שמינית כדור.

נפח הכדור בקואורדינטות אלה שווה למספר האופנים n שבתוך שמינית הכדור.

כלומר, n הוא מספר הצירופים של n_i שמקיימים את אי-השוויון $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 < \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2$.

מספר זה שווה לשמינית נפח הכדור: $n = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{\lambda}\right)^3$.

צפיפות מספר האופנים היא הנגזרת $\left|\frac{dn}{d\lambda}\right| = 4\pi L^3 \lambda^{-4}$

כדי להיות בלתי תלויים בנפח התיבה הספציפית שבה נמצאים הגלים, נחלק בנפח התיבה $V=L^3$ (כפי שעשינו במקרה החד-ממדי).

כלומר, צפיפות האופנים ליחידת נפח היא $\left|\frac{d^2 n}{d\lambda dV}\right| = 4\pi\lambda^{-4}$.

נגדיר את צפיפות המצבים הנפחית $N \equiv \frac{dn}{dV}$

ואז $\left|\frac{dN}{d\lambda}\right| = 4\pi\lambda^{-4}$.

דרך אחרת לראות את צפיפות האופנים:

אמרנו שרדיוס הקליפה הכדורית הוא $r = 2L/\lambda$.

אז הנפח (במרחב n_i) של שכבה בעובי dr סביב הקליפה הוא

$$d\Omega = \frac{1}{8}4\pi r^2 dr = \frac{1}{8}4\pi\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 d\left(\frac{2L}{\lambda}\right) = \frac{1}{8}4\pi\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2\left(\frac{2L}{\lambda^2}\right)d\lambda = 4\pi\frac{L^3}{\lambda^4}d\lambda.$$

מאחר שכל אופן תופס נפח של 1^3 (כי n_i הם מספרים טבעיים), אז מספר האופנים שווה ל-$d\Omega$, וקיבלנו את אותה תוצאה. שני החישובים הם פשוט הקשר בין השטח של כדור והנפח שלו.

<u>התחשבות בקיטוב של הגל האלקטרומגנטי:</u>

צפיפות האופנים שחישבנו מתאימה לגלים של פונקציה סקלרית, כגון גלי קול, בהם ψ היא לחץ.
עבור גל אלקטרומגנטי יש לקחת בחשבון שזהו גל של שדות וקטוריים (השדה החשמלי והמגנטי), כך שבעקרון ל- ψ יש 6 רכיבים (דרגות חופש).

מסתבר (לומדים בקלאסית 2) שישנם אילוצים המקשרים בין הרכיבים השונים:

- $\hat{E}\cdot\hat{S}=0$: כוון השדה החשמלי $\hat{E}$ חייב להיות ניצב לכוון התקדמות הגל $\hat{S}$.
  אז מתוך 3 דרגות החופש של השדה החשמלי נשארות רק 2.
- כוון השדה המגנטי תמיד מקיים $\hat{E}\times\hat{B}=\hat{S}$, וגודלו תלוי בגודל השדה החשמלי, כך שאין דרגות חופש נוספות שנובעות מהשדה המגנטי.

אז עבור כל סט ערכים של n_x, n_y, n_z יש לא אופן אחד אלא שניים.

לכן צפיפות האופנים היא $\frac{dN}{d\lambda} = 8\pi\lambda^{-4}$ (כאשר נפטרנו מהערך המוחלט, שלא נזדקק לו).

קרינה בשווי משקל תרמי

אמרנו קודם שפונקציית הגל בתוך התא שלנו היא איזושהי קומבינציה לינארית מהצורה

$$\psi = \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} a_{n_x n_y n_z} \psi_{n_x n_y n_z}(\vec{r}, t),$$

כאשר $\psi_{n_x n_y n_z}(\vec{r}, t)$ היא פונקציית הגל של האופן עם מספרי האופן n_x, n_y, n_z.

אבל מהם ערכי המקדמים $a_{n_x n_y n_z}$?

בעקרון, המקדמים יכולים לקבל כל ערך.

אבל אנו נהיה מעונינים במקרה ספציפי, בו הקרינה נמצאת **בשווי משקל תרמי** עם דפנות התא:

- דפנות התא נמצאות **בטמפרטורה מסויימת** T.
- **שווי משקל תרמי** אומר שגם הקרינה נמצאת בטמפרטורה זו.
- כלומר, באופן כללי, עוצמת הקרינה היא כזו שמתאימה לטמפרטורה T.
- אם עוצמת הקרינה "חלשה" מדי, במובן מסוים, אז תעבור אנרגיה מהדפנות אל הקרינה, כך שגם הקרינה תהיה בטמפרטורה T.
- אם עוצמת הקרינה "חזקה" מדי, תעבור אנרגיה מהקרינה אל הדפנות, ושוב יושג שווי משקל.

בפיזיקה סטטיסטית ניתן להראות שמאחר שהקרינה נמצאת בשווי משקל תרמי עם חומר בטמפרטורה T, אז המקדמים $a_{n_x n_y n_z}$ הם כאלה שבכל אופן יש אנרגיה ממוצעת $\overline{E} = kT$.

זה נובע מכך שזוהי האנרגיה הממוצעת של התפלגות בולצמן, אותה ראינו קודם.

אנו לא נזדקק לערכים הספציפיים של המקדמים. יספיק לנו לדעת שבכל אופן יש אנרגיה ממוצעת $\overline{E} = kT$.

יישום לקרינת גוף שחור

כעת אנו מוכנים להמשיך עם הנושא המרכזי של קרינת גוף שחור.

<u>מהו גוף שחור?</u>

גוף לבן מחזיר את כל (או רוב) האור החיצוני שפוגע בו.

גוף בעל צבע מסוים (למשל, אדום) בולע אור בכל אורכי הגל ומחזיר רק אור באותו צבע.

לעומת זאת, גוף שחור בולע את כל האור שפוגע בו.

בעקבות בליעת אנרגית האור, הגוף השחור מתחמם ופולט את האנרגיה התרמית שלו כקרינה בעלת ספקטרום אורכי גל שונה מהספקטרום שפגע בו.

ספקטרום זה נקרא ספקטרום **קרינת גוף שחור** או **קרינה תרמית**.

ראינו בניסוי שנורת להט פולטת קרינה רציפה –קרינת גוף שחור בטמפרטורה של אותה נורה.

לדוגמה: **אפקט החממה**: כדור הארץ מחומם ע"י האור הנראה של השמש (כלומר, בולע את כל הקרינה, בקרוב שהוא אכן שחור), ופולט קרינה תרמית שמתאימה לטמפרטורה שלו.

אפקט החממה נובע מזה ש- CO_2 ומים באטמוספירה בולעים את האור האינפרא-אדום הנפלט מכדור הארץ וגורמים לחימום האטמוספירה (במקום שאנרגיה זו תפלט לחלל).

ככל שהטמפרטורה נמוכה יותר, אורך הגל של הקרינה ארוך יותר. למשל:

שמש: 5500 מעלות: אור נראה (אורך-גל טיפוסי של $\lambda \sim 0.5\ \mu m$).

כדור הארץ: 300 מעלות: אור אינפרה-אדום (אורך-גל טיפוסי של $\lambda \sim 10\ \mu m$).

חומרים רבים הם בעלי תכונה זו של גוף שחור במידה זו או אחרת: הם בולעים אור במגוון אורכי גל.

אבל הדרך הטובה ביותר לדמות גוף שחור היא באמצעות **פתח** קטן **בתא** בעל נפח פנימי גדול (עוזר להשחיר אותו מבפנים), כך שלקרן שנכנסת דרך הפתח סיכוי קטן מאוד לצאת אלא לאחר החזרות רבות, כך שעד שהיא תוחזר אל הפתח הסיכוי שלה להבלע גדול מאוד.

ניתן לראות שפתח כזה למעשה בולע כל אור שפוגע בו, כך שהוא "גוף שחור".

האור הנבלע מחמם את דפנות התא, ואלו פולטות קרינת גוף שחור בספקטרום המתאים לטמפרטורת התא.

כפי שכבר ראינו, זה אומר שבכל אופן של הקרינה ישנה אנרגיה ממוצעת $\overline{E} = kT$.

כמו כן, ראינו מהי צפיפות המצבים של הקרינה.

משני נתונים אלה נוכל לחשב את ספקטרות ועוצמת הקרינה שנפלטת מפתח התא.

<u>מה היה ידוע על קרינת גוף שחור במאה ה-19</u>

סך כל ההספק המוקרן:

ב-1879, סטפאן (Joseph Stefan) מצא מתוך מדידות שנערכו ע"י Tyndall,
שההספק ליחידת שטח שמוקרן מגוף שחור תלוי רק בטמפרטורה, לפי $R=\sigma T^4$,
כאשר T היא הטמפרטורה ו-$\sigma=5.7\times10^{-8}$ W/(m^{2}K^4) נקרא קבוע סטפאן.
בולצמן (Boltzmann) גזר כלל זה ע"י הפעלת שיקולים תרמודינמיים למשוואות מקסוול.
לכן, $R=\sigma T^4$ נקרא היום החוק של סטפאן-בוצלמן.

כמו שההספק הכולל תלוי רק בטמפרטורה, כך גם התפלגות ההספק לפי אורכי גל שונים – הספקטרום – תלוי רק בטמפרטורה.
וין (Wilhelm Wien) מצא על-סמך שיקולים תיאורטיים דומים שאורך הגל של שיא ההתפלגות פרופורציוני באופן הפוך לטמפרטורה: $\lambda_m = (2.9\times10^{-3}\text{mK})/T$.
כלל זה ידוע כחוק ההסטה של וין (Wien’s displacement law), שתרם לפרס הנובל של וין ב-1911.

<u>מה לא הצליחו להסביר</u>

הספקטרום המלא $R(\lambda)$ של קרינת גוף שחור כפונקציה של אורך הגל λ של הקרינה לא הוסבר היטב ע"י התיאוריה הקלאסית.
הרעיון התיאורטי היה

- להניח שהקרינה נובעת ממטענים קשורים (אלקטרונים, יונים) בדפנות התא, בעלי תנועה תרמית בתדירויות שונות, שצריכים לפלוט אור לפי משוואות מקסוול.
- להניח כי דפנות התא נמצאות בשווי משקל תרמי עם הקרינה שבתוך התא.
- לחשב את התפלגות האנרגיה של הקרינה בתוך התא.
- לחשב באיזה קצב הקרינה שבתוך התא "זולגת" החוצה דרך הפתח – מהו ההספק הבוקע מהפתח?

על-סמך שיטה זו, וין מצא ביטוי שהתאים לניסיון באורכי גל קצרים.

ואילו ריילי (Rayleigh), תוך שימוש בשיטה שפותחה ע"י Jeans, מצא ביטוי שהתאים לנסיון באורכי גל ארוכים (זה היה לאחר שפלאנק פתר את הבעיה באמצעות ההנחה הקוונטית).

אבל לא היה כלל אחד שהסביר את כל הספקטרום הנסיוני.

נראה את עיקרי **החישוב של ריילי**, שישמש אותנו גם בהמשך:

משיקולים בעיקר גיאומטריים, ניתן להראות (ראו בהמשך\בתרגול) שההספק R של הקרינה שבוקעת מהפתח קשור לצפיפות האנרגיה הנפחית $U = \dfrac{dE}{dV}$ בתוך התא לפי $R = \dfrac{1}{4}cU$.

כמו כן, ניתן להראות (לומדים באלגברה לינארית – טורי פורייה) שגלים בעלי אורכי גל שונים אינם תלויים זה בזה, כלומר, מספיק לעבוד על אורך גל מסוים בכל פעם.
לכן, המשוואה שכתבנו עבור סך-כל האנרגיה נכונה גם עבור כל אורך גל בנפרד:

$$R(\lambda) \equiv \frac{dR}{d\lambda} = \frac{1}{4}cU(\lambda),$$

כאשר $U(\lambda) = \dfrac{dU}{d\lambda} = \dfrac{d^2E}{d\lambda dV}$ היא צפיפות האנרגיה הנפחית ליחידת אורך גל של הקרינה שבתוך התא.

אז בשל היחס $R(\lambda) = ¼\, cU(\lambda)$, **מציאת ההספק המוקרן שקולה למציאת צפיפות האנרגיה** $U(\lambda)$ (האנרגיה ליחידת נפח ליחידת אורך גל). נעשה זאת:

משיקולים של פיזיקה תרמית, ניתן להראות כי האנרגיה של כל אופן בתא היא ממוצע האנרגיה של התפלגות בולצמן, כלומר, $\overline{E} = \int_0^\infty \dfrac{1}{kT} e^{-E/kT} E dE = kT$.

אם יש n אופנים, האנרגיה הכוללת של הקרינה בתא היא $E = n\overline{E}$.

אז צפיפות האנרגיה היא

$$U(\lambda) \equiv \frac{dU}{d\lambda} \equiv \frac{d^2E}{d\lambda dV}$$
$$= \frac{d^2n}{d\lambda dV}\overline{E} \equiv \frac{dN}{d\lambda}\overline{E}$$

כאשר השוויון בין השורות נובע מהשוויון $E = n\overline{E}$

מצאנו קודם כי צפיפות מספר האופנים היא $\frac{dN}{d\lambda} = 8\pi\lambda^{-4}$.

אז נציב ונקבל $\boxed{U(\lambda) = 8\pi kT\lambda^{-4}}$

זהו חוק ריילי-ג'ינס, וממנו מתקבל (לאחר שימוש ב- $R(\lambda) = U(\lambda)c/4$) כי **ההספק ליחידת שטח ליחידת אורך גל** של הקרינה שבוקעת מפתח התא (קרינת גוף שחור):

$$\boxed{R(\lambda) = 2\pi ckT\lambda^{-4}}$$

ניתן מיד לראות שההספק מתבדר עבור אורך גל קצר.

הסיבה לכך היא שצפיפות מספר האופנים גדלה ככל שאורך הגל מתקצר – ניתן "להכניס" יותר אופנים לתא ככל ש- L/λ גדל.

לכל אופן אותה אנרגיה ממוצעת (kT), ולכן האנרגיה מתבדרת באורכי גל קצרים.

תופעה זו נקראה בשם "הקטסטרופה האולטרה-סגולה", משום שהיא מתרחשת עבור אור בעל אורך גל קצר (כשם שאור אולטרה סגול הוא בעל אורך גל קצר מאור נראה, אם כי הקטסטרופה מחמירה ככל שאורך הגל מתקצר עוד ועוד, מעבר לאולטרה סגול).

ברור שלא יתכן שההספק מתבדר, וזה גם לא מה שרואים בניסויים.

ההנחה של פלאנק

ב-1900 פלאנק (Max Planck) מצא פונקציה שתואמת את התוצאות הנסיוניות של ספקטרום קרינת גוף שחור.

אחרי שהיתה בידיו הפונקציה, הוא מצא את ההנחה הפיזיקלית שנותנת את הספקטרום.

שימו לב שאמרנו קודם, כי בכל אופן יכולה להיות כל אנרגיה, לפי תלות במקדם $a_{n_x n_y n_z}$ של אותו אופן, שהוא מספר ממשי שיכול לקבל כל אופן.

אמרנו גם שההתפלגות של האנרגיה היא התפלגות בולצמן הרציפה, שהממוצע שלה הוא kT .

פלאנק הניח משהו אחר: **אופן הגל אינו יכול לקבל כל ערך של האנרגיה, אלא רק ערכים מסוימים:**

$$\boxed{E_j = jh\nu}$$

כאשר

- h הוא קבוע כלשהו, הנקרא קבוע פלאנק
- $\nu=c/\lambda$ הוא תדירות הגל
- j הוא כל מספר טבעי או 0.

אז כעת פונקצית צפיפות ההסתברות הרציפה של בולצמן, $P(E)=\frac{1}{kT}e^{-E/kT}$,

הופכת להיות פונקציה דיסקרטית: $P_j = Ce^{-jh\nu/kT}$,

כאשר $C = 1-e^{-h\nu/kT}$ מתקבל ע"י תנאי הנורמליזצה $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$.

שאלת בית: הוכיחו כי $C = 1-e^{-h\nu/kT}$. (רמז: זהו טור הנדסי.)

כעת נמצא את האנרגיה הממוצעת

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \sum_{j=0}^{\infty} E_j P_j \\ &= \frac{hc}{\lambda}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}\end{aligned}$$

שאלת בית: פתרו את הסכום והוכיחו את הביטוי לאנרגיה הממוצעת.

שימו לב למשמעות של $\overline{E}$: זוהי **האנרגיה הממוצעת של אופן הגל בעל התדירות ν (או אורך הגל λ) במצב שווי משקל תרמי עם טמפרטורה T.**

כעת נשתמש באנרגיה ממוצעת זו כדי למצוא את צפיפות האנרגיה בתוך התא (האנרגיה ליחידת נפח ליחידת אורך גל).

$$\boxed{\begin{aligned} U(\lambda) &= \frac{dN}{d\lambda}\overline{E} \\ &= 8\pi\frac{hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1} \end{aligned}}$$

זוהי צפיפות האנרגיה ליחידת נפח ליחידת אורך גל של הקרינה בתוך התא, שקשורה, כאמור, לספקטרום ההספק ליחידת שטח של הקרינה לפי $R(\lambda) = \frac{1}{4} cU(\lambda)$.

שאלת בית: הראו כי מצפיפות האנרגיה בתא מתקבלות התכונות הידועות של קרינת גוף שחור:

א. קבלו את ביטוי ריילי-ג'ינס עבור אורך גל גדול.

ב. הראו שאין קטסטרופה אולטרה-סגולה.

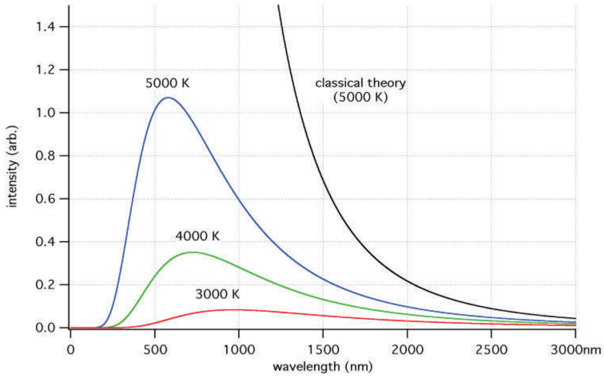
ג. ביחס לשני הסעיפים הקודמים, קבעו מתי ניתן להתייחס לאורך הגל כ"גדול" ומתי הוא נחשב "קצר". הסבירו מדוע באורך גל גדול, הסכום של פלאנק נותן את אותה תוצאה כמו האינטגרל הקלאסי בחישוב האנרגיה הממוצעת לאופן, ואילו באורך גל קצר ההבדלים בין שני החישובים הם משמעותיים.

ד. הראו שאורך הגל של שיא ההתפלגות נמצא ביחס הפוך לטמפרטורה.

ה. הראו שסך כל ההספק פרופורציוני לטמפרטורה ברביעית (ניתן להשתמש בטבלת אינטגרלים).

ישנה התאמה מצוינת של הביטוי לספקטרום הקרינה הנמדד בכל אורכי הגל.

ציור זה מראה את ההבדלים בין הספקטרום של פלאנק (שמתאים לנתונים) והספקטרום של ריילי-ג'ינס:



התאמת הביטוי לנתונים נותנת את ערכו של קבוע פלאנק:

$$h = 6.626\times10^{-34}\,J\sec = 4.136\times10^{-15}\,eV\sec$$

פלאנק לא הצליח ליישב ביטוי זה עם שיקולים קלאסיים רגילים, אלא רק עם ההנחה של **הקוונטיזציה של אנרגית האור**.

הנחה זו אומרת שלאור יש אנרגיה שמופיעה בקוונטות (מנות) בעלות ערכים מסוימים בלבד.

מנות אלה נקראות היום פוטונים.

לכל קוונטה אנרגיה ששוה ל- $h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$**, והמספר הטבעי** j **מתאר את מספר הפוטונים בעלי אותה תדירות (או אורך גל) שנמצאות בתוך התא.**

חשיבותה של ההנחה הקוונטית לא הובנה היטב.

ההבנה שיש כאן מהפכה תפישתית ולא סתם משהו מוזר שקשור לקרינת גוף שחור באה כאשר איינשטיין פתר באמצעותה את בעיית האפקט הפוטו-אלקטרי ב-1905.

שימו לב להבדל הפיזיקאלי בין ההצהרה הקלאסית שהאנרגיה הממוצעת לכל אופן היא $\overline{E} = kT$ וההצהרה הקוונטית שהאנרגיה הממוצעת לכן אופן היא $\overline{E} = \dfrac{hc}{\lambda}\dfrac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$:

בניסוח הקוונטי, מאחר שהאנרגיה של כל קוונטה של אור (פוטון) היא hc/λ, אז ניתן לכתוב $\overline{E} = \dfrac{hc}{\lambda}\overline{n}_\lambda$, כאשר $\overline{n}_\lambda = \dfrac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$ הוא המספר הממוצע של פוטונים בעלי אורך גל λ.

לכל פוטון בעל אורך גל קצר יש אנרגיה גדולה, ולכן לא יתכן שיהיו פוטונים רבים כאלה – פשוט אין מספיק אנרגיה תרמית ליצור הרבה פוטונים שלכל אחד מהם אנרגיה רבה. לכן, המספר הממוצע של פוטונים קטן כאשר אורך הגל קצר (האנרגיה של כל פוטון גדולה), כפי שניתן לראות מהביטוי $\bar{n}_\lambda = \dfrac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$.

היום משתמשים בספקטרום גוף שחור בצורות רבות:

מדידת טמפרטורה לצרכים תעשיתיים, סביבתיים, רפואיים, וכו'.

פלוקטואציות טמפרטורה בקרינת הרקע הקוסמית (ממנה מקבלים פרמטרים שונים של היקום, כגון גיל היקום, צפיפות החומר הרגיל, החומר האפל, והאנרגיה האפלה):