תורת הקבוצות — תרגיל בית 7

חיים שרגא רוזנר

ד' בסיון, תשע"ה*

תקציר

אקסיומות.

רשימת האקסיומות

1. אקסיומות ראשוניות

אקסיומת הקיום
(א) קיימת קבוצה.

אקסיומת ההיקפיות
(ב) קבוצות נקבעות על ידי איבריהן. לשון אחר: $x = y$ א.ס.ס. לכל z מתקיים $z \in x \leftrightarrow z \in y$.

סכמת אקסיומות ההפרדה
(ג) אם A קבוצה, ו־φ תכונה, אזי אוסף האיברים ב־A המקיימים את התכונה φ הוא קבוצה. לשון אחר: תהי $\varphi(x,y)$ נוסחה (אולי עם עוד פרמטרים) ותהי A קבוצה. אזי האוסף $\{x \in A\colon \varphi(x,A)\}$ הוא קבוצה.

2. אקסיומות בנייה: הזוגות, האיחוד, ההחלפה, החזקה

אקסיומת הזוגות
(א) תהיינה x, y קבוצות. אזי האוסף $\{x,y\}$ הוא קבוצה.

אקסיומת האיחוד
(ב) תהי $\mathcal{F}$ קבוצה. אזי $\bigcup \mathcal{F} = \{x\colon \exists y, x \in y \wedge y \in \mathcal{F}\}$ היא קבוצה.

סכמת אקסיומות ההחלפה
(ג) תהי A קבוצה, ותהי $\varphi(x,y)$ נוסחה, אשר היא כלל התאמה חד־ערכי על איברי A. לשון אחר, לכל $x \in A$ קיים ויחיד y כך ש־$\varphi(x,y)$. אזי האוסף $\{y\colon \exists x \in A, \varphi(x,y)\}$ של תמונת φ הוא קבוצה.

אקסיומת קבוצת החזקה
(ד) תהי A קבוצה. אזי האוסף $\mathcal{P}(A) = \{x \subseteq A\}$ הוא קבוצה.

3. אקסיומת היסודיות

אקסיומת היסודיות
(א) לכל קבוצה לא ריקה A קיים איבר מינימלי ליחס השייכות.
לשון אחר: בכל קבוצה לא ריקה A קיים איבר $a \in A$ כך שאין איבר $b \in A$ המקיים $b \in a$.
בניסוח פורמלי:

$$\forall A \left[A = \varnothing \vee \exists a \in A \forall b \in A \left(b \notin a\right)\right]$$

* להגשה עד יום **חמישי** י"ז בסיון (4 יונ') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

4. אקסיומות נוספות

אקסיומת האינסוף (א) קיימת קבוצה I כך ש־$\emptyset \in I$ וכן לכל $a \in I$ גם $S(a) = a \cup \{a\} \in I$.

אקסיומת הבחירה (ב) לכל קבוצה $\mathcal{F}$ של קבוצות לא ריקות, יש פונקציית בחירה על $\mathcal{F}$, כלומר פונקציה $f: \mathcal{F} \to \bigcup(\mathcal{F})$ המקיימת: לכל $A \in \mathcal{F}$, $f(A) \in A$.

תזכורות

1. בעזרת שלוש האקסיומות מסעיף 1 ניתן להראות כי קיימת הקבוצה הריקה $\varnothing$, והיא יחידה.
2. **זוג סדור** $\langle a,b \rangle$ הוא הקבוצה $\langle a,b \rangle = \{a,\{a,b\}\}$. לזוג זה התכונה $\langle a_1,b_1 \rangle = \langle a_2,b_2 \rangle$ א.ס.ם. $a_1 = a_2$ וכן $b_1 = b_2$. הזוג הסדור מוגדר בעזרת שימוש חוזר באקסיומת הזוגות.

1 מערכת אקסיומות ZFC

אנו מציגים מערכת אקסיומות, ובעזרתן מגדירים את המושג קבוצה. אם הצלחנו לתאר אובייקט כלשהו שאיננו מקיים את אחת האקסיומות האלו, הרי שנאמר שאובייקט זה איננו קבוצה.

1.1 אקסיומת הקיום, אקסיומת ההיקפיות וסכמת ההפרדה

1. תהיינה A,B קבוצות. הראו כי האוסף הבא הוא קבוצה:

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

השתמשו רק באקסיומות שבכותרת הסעיף.

2. מצאו את הסתירה בדרך ההוכחה הבאה, הוכחה שכל הקבוצות הקיימות הן ריקות.

תהי $A \neq \varnothing$ קבוצה, ונגדיר תת־קבוצה B של A על ידי $B = \{x \in A \colon x \notin B\}$. קבוצה זו הוגדרה בעזרת סכמת ההפרדה, כאשר הנוסחא φ היא $\neg x \in B$. מכיוון ש־A לא ריקה, ניתן לבחור $a \in A$ כלשהו. נבדוק האם $a \in B$ או לא. נניח $a \in B$. אזי מהגדרת B אנו יודעים כי $a \notin B$, וזו סתירה. מנגד, אם $a \notin B$ אז a מקיים את הדרוש מאיברי B, ולכם $a \in B$, וגם זו סתירה. מצאנו, אם כן כי כל האפשרויות לענות לשאלה "האם a הוא איבר של B?" אינן נכונות, וכך מצאנו סתירה להנחה בשלילה כי קיימת $A \neq \varnothing$. המסקנה העולה היא כי כל קבוצה היא ריקה. לפי אקסיומת ההיקפיות ניתן לקבוע כי יש רק קבוצה אחת, והיא הקבוצה הריקה. $\otimes$

3. תהי A קבוצה ותהי $\varphi(x)$ נוסחא. הוכיחו את קיום הקבוצות

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in A \colon \varphi(x)\} \\ A_2 &= \{x \in A \colon \neg\varphi(x)\} \end{aligned}$$

הראו כי לכל איבר a ב־A מתקיים בדיוק אחד מהשניים:

- $a \in A_1$,
- $a \in A_2$.

הסיקו כי על ידי ההפרדה ניתן להפריד את A לשתי קבוצות זרות, זו שמקיימת את φ וזו שאינה מקיימת את φ.

1.2 אקסיומות בנייה: הזוגות, האיחוד, ההחלפה, החזקה.

1. נביט בנסיון אחר להגדיר את הזוג הסדור. ננסה להגדיר $\langle a,b\rangle = \{a,\{b\}\}$. בעזרת הגדרה נסיונית זו, מצאו דוגמא נגדית לתכונה $\langle a_1,b_1\rangle = \langle a_2,b_2\rangle$ א.ס.ם. $a_1 = a_2$ וכן $b_1 = b_2$.
2. נסחו, בשפת הנוסחאות של תורת הקבוצות, את אקסיומת הזוגות.
3. בנו קבוצה בת 3 איברים תוך הסתייעות באקסיומות מסעיף 1 ובאקסיומות הזוגות והאיחוד. תרגיל פתור

פתרון דרך ההיסק נתונה בטבלה. אנו משתמשים כאן חזור והשתמש באקסיומת הזוגות, וכן בתזכורת 1 ובאקסיומת האיחוד.

מספר צעד	תוצאה	נימוק
1	$\varnothing$	תזכורת **1**
2	$\{\varnothing\}$	זיווג של 1 עם 1.
3	$\{\{\varnothing\}\}$	זיווג של 2 עם 2.
4	$\{\{\{\varnothing\}\}\}$	זיווג של 3 עם 3.
5	$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$	זיווג של 1 עם 2.
6	$\{\{\{\{\varnothing\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$	זיווג של 4 עם 5.
7	$\{\{\{\varnothing\}\},\varnothing,\{\varnothing\}\}$	איחוד של 6.

מצאנו, אם כן, כי קיימת הקבוצה $\{\{\{\varnothing\}\},\varnothing,\{\varnothing\}\}$. בקבוצה זו יש שלושה איברים שונים, כנדרש. ■

4. בנו קבוצה בת 4 איברים. מותר להשתמש באותן האקסיומות מהתרגיל הקודם, ומומלץ להמשיך את המספור ממנו.
5. בנו, בדרך מהירה ככל האפשר, קבוצה בת 128 איברים. בנו, בדרך מהירה ככל האפשר, קבוצה בת 127 איברים. אין להשתמש באקסיומת האינסוף.
6. תהי A קבוצה. הראו כי $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$.

1.3 אקסיומת היסודיות

1. הראו, לכל אחת מהקבוצות הבאות, כי הן מקיימות את אקסיומת היסודיות:
   (א) $\varnothing$.
   (ב) $\{\varnothing\}$.
   (ג) $\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

שימו לב! נתבקשתם להוכיח כי האקסיומה מתקיימת עבור הקבוצות האלו, אין צורך להראות כי כל האיברים מקיימים את האקסיומה.

2. האם תיתכן הקבוצה $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots : i \in \omega\}$ כך שלכל $i \in \omega$ מתקיים $A_{i+1} \in A_i$?

3. הוכיחו, בעזרת אקסיומת היסודיות, כי לא קיימת קבוצת כל הקבוצות V. שימו לב להבדל בין הוכחה זו לבין הפרדוקס של ראסל.

ב ה צ ל ח ה!