בס"ד

שיעור מס' 2 באלגברה לינארית (למתמטיקה)

הנושא: דטרמיננטות - לפי מינורים ותכונות של דטרמיננטות

הגדרה - פיתוח דטרמיננטה לפי שורה ראשונה

עבור המטריצה A מסדר n, נגדיר את הדטרמיננטה של A באמצעות הנוסחה הבאה: $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|M_{1j}|$.

כאשר M_{1j} הינו מטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$ המתקבלת ממטריצה A ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה ה-j. M_{1j} נקרא - "המינור ה-$(1,j)$ של A".

דוגמא: נמצא את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&1&5\\4&2&3\end{pmatrix}$.

פתרון:

$$\begin{vmatrix}1&3&4\\2&1&5\\4&2&3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&5\\2&3\end{vmatrix}}_{M_{1,1}}+(-1)^{1+2}\cdot3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2&5\\4&3\end{vmatrix}}_{M_{1,2}}+(-1)^{1+3}\cdot4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}}_{M_{1,3}}=$$

בגלל שהאיבר 1 נמצא בשורה 1 ובעמודה 1

3 נמצא בשורה 1 ובעמודה 2

$$=1\cdot(3-10)-3\cdot(6-20)+4\cdot(4-4)=35.$$

טענה: פיתוח דטרמיננטה לפי שורה i

תהי A מטריצה מסדר n, אזי: $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$,

כאשר M_{ij} הינו מטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$ אשר מתקבלת מהמטריצה A ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j. (M_{ij} נקרא "המינור ה-(i,j)" של A).

דוגמא: נפתח את הדטרמיננטה של אותה מטריצה מהדוגמא הקודמת לפי שורה 2:

$$\begin{vmatrix}1&3&4\\2&1&5\\4&2&3\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}}_{M_{2,1}}+(-1)^{2+2}\cdot1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&4\\4&3\end{vmatrix}}_{M_{2,2}}+(-1)^{2+3}\cdot5\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&3\\4&2\end{vmatrix}}_{M_{2,3}}=$$

$$=-2\cdot(9-8)+1\cdot(3-16)-5\cdot(2-12)=35$$

בס"ד

טענה נוספת- פיתוח לפי עמודה j

תהי A מטריצה מסדר n×n, אזי - $|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$,
כאשר M_{ij} היא מטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$ אשר מתקבלת
מהמטריצה A ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j.

דוגמא: נפתח את אותה המטריצה לפי עמודה ראשונה:

$$\begin{vmatrix}1&3&4\\2&1&5\\4&2&3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&5\\2&3\end{vmatrix}}_{M_{1,1}}+(-1)^{2+1}\cdot 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}}_{M_{2,1}}+(-1)^{3+1}\cdot 4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}3&4\\1&5\end{vmatrix}}_{M_{3,1}}=$$

$$=1\cdot(3-10)\quad-2\cdot(9-8)\quad+4\cdot(15-4)=35.$$

הערה: לאחר שראינו שאפשר לפתח דטרמיננטה לפי כל שורה ולפי כל עמודה, כעת כאשר באים לחשב דטרמיננטה כדאי לבחור את השורה או העמודה שיש בה את מס' האפסים הגדול ביותר, על מנת להקל על החישובים.

תכונות של דטרמיננטה

1. אם A מטריצה ריבועית מסדר n אז $|A|=|A^t|$.

2. לכל שתי מטריצות A ו-B ריבועיות מאותו הסדר:
$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

3. $|A^k|=|\underbrace{A\cdots\cdots A}_{k\text{ פעמים}}|=\underbrace{|A|\cdots\cdots|A|}_{k\text{ פעמים}}=|A|^k$.

4. אם A מטריצה משולשית עליונה/תחתונה מסדר n אז הדטרמיננטה שלה שווה למכפלת איברי האלכסון.

למשל:
$$\begin{vmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{vmatrix}=2\cdot5\cdot7=70$$

מסקנה: אם A מטריצה אלכסונית אז $|A|$ שווה למכפלת איברי האלכסון.
ובפרט: $|I|=1$. (כי: $I=\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}$).

בס"ד

(5) אם B מטריצה המתקבלת מ-A ע"י פעולת שורה אזי:

א. אם B המתקבלה מ-A ע"י כפל של אחת השורות בסקלר 2

אזי - $|A| = \frac{1}{2}\cdot|B|$

ב. אם B המתקבלה מ-A ע"י החלפת שתי שורות אזי $|A|=-|B|$.

ג. אם B " " הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת

אזי - $|A|=|B|$.

דוגמא: חשב את הדטרמיננטה של המטריצה: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

נבצע $R_1 \leftrightarrow R_3$ ולכן נכפיל את הדטרמיננטה במינוס.

נבצע: $R_2+R_1\to R_2$, $R_3-2R_1\to R_3$ שלא משנים את הדטרמיננטה.

$$= -4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4\cdot(1\cdot1\cdot1) = \boxed{-4}.$$

נבצע $R_2\cdot\frac{1}{4}\to R_2$ ולכן נכפיל את הדטרמיננטה בהופכי: 4.

נבצע $R_3+R_2\to R_3$ שלא משנה את הדטרמיננטה.

קיבלנו מטריצה מדורגת שהיא משולשית עליונה לכן נכפיל את איברי האלכסון.

דוגמא נוספת (אפשר לדלג אם אין זמן):

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 16 \\ -3 & -6 & 18 \\ 5 & 12 & 35 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -6 \\ 5 & 12 & 35 \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} =$$

נבצע: $\frac{1}{2}R_1\to R_1$, $-\frac{1}{3}R_2\to R_2$ ולכן נכפיל את הדטרמיננטה בהופכיים

נבצע: $R_2-R_1\to R_2$, $R_3-5R_1\to R_3$ שלא משנה את הדטרמיננטה.

ב"ה

$$= -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 37 \end{vmatrix} = -6 \cdot (1 \cdot (-1) \cdot 37) = \boxed{222}$$

נבצע: $R_3 - 3R_2 \to R_3$
שלא משנה את הדטרמיננטה

קיבלנו מטריצה מדורגת ושוב נכפול את איברי האלכסון.

⑥. אם במטריצה A שורה/עמודה של אפסים אז $|A|=0$.

⑦. אם במטריצה ריבועית A שתי שורות/עמודות שוות זו לזו, אז $|A|=0$.

⑧. אם במטריצה A שורה/עמודה שהיא כפולה של שורה/עמודה אחרת אז $|A|=0$.

⑨. אם A מטריצה מסדר n ו- $B = c \cdot A$ עבור סקלר c אז:
$|B| = |cA| = c^n \cdot |A|$
(כי למעשה מכפילים כל שורה בסקלר c, ואז הסקלר c יוצא מכל שורה, ויש n שורות, לכן מכפילים ב- c^n).

⑩. <u>משפט:</u> A הפיכה $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

⑪. אם A מטריצה הפיכה אז: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

<u>הוכחה:</u> אם A הפיכה אז קיימת מטריצה A^{-1} כך ש: $A \cdot A^{-1} = I$.
נעשה דטרמיננטה משני האגפים: $|A \cdot A^{-1}| = |I|$

$\Downarrow$

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$

כיוון ש-A הפיכה אז $|A| \neq 0$, לכן נחלק בה ונקבל:

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. <u>מש"ל.</u>

בס"ד

תרגיל: חשב את הדטרמיננטה -

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 \cdots 1 & & \alpha \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$\underset{R_1+\sum R_i \to R_1}{=} \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & \alpha+n-1 & \cdots & \alpha+n-1 \\ 1 & \alpha & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{\frac{1}{\alpha+n-1}R_1 \to R_1}{=} (\alpha+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

נוסיף את כל השורות לשורה הראשונה.

$$\underset{R_i-R_1 \to R_i,\ i\neq 1}{=} (\alpha+n-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = \boxed{(\alpha+n-1)\cdot \underbrace{1\cdot(\alpha-1)^{n-1}}_{\text{כפל האיברים באלכסון הראשי}}}$$

נחסר מכל השורות את השורה הראשונה.

זו מטריצה משולשית עליונה.

מש"ל.

תרגיל: נתונות: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. חשב את: $|A|, |B|, |A^t|, |3A^tB^{-1}|$.

פיתרון:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 4-6 = -2$$

$$|B| = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix} = 3-0 = 3$$

$$|A^t| = |A| = -2$$

$$|3A^tB^{-1}| = 3^2\cdot|A^t|\cdot|B^{-1}| \underset{|B|\neq 0}{=} 9\cdot|A|\cdot\frac{1}{|B|} = 9\cdot(-2)\cdot\frac{1}{3} = -6.$$

$|B|\neq 0$ ולכן B הפיכה

מש"ל.

בס״ד

הצמודה הקלאסית (Adjoint)

<u>הגדרה</u>: תהי A מטריצה ריבועית. המטריצה הצמודה הקלאסית ל-A כלומר $\operatorname{adj} A$ הינה המטריצה שאיבריה הם:

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ji}|$$

<u>דוגמא</u>: נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. נמצא את $\operatorname{adj} A$.

$$(\operatorname{adj} A)_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$(\operatorname{adj} A)_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +12$$

$$(\operatorname{adj} A)_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(\operatorname{adj} A)_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

$$(\operatorname{adj} A)_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$(\operatorname{adj} A)_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = +13$$

$$(\operatorname{adj} A)_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$(\operatorname{adj} A)_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$(\operatorname{adj} A)_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -1 \\ -12 & 3 & 13 \\ 8 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

<u>משפט</u>: $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = |A| \cdot I$

בס"ד

מסקנה: אם מטריצה A הפיכה (כלומר $|A|\neq 0$), אזי: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj(A)$. (וזו שיטה נוספת למצוא את A^{-1})

דוגמא: מצאו את A^{-1} עבור המטריצה A מהדוגמא הקודמת.

פתרון:

נחשב את הדטרמיננטה של A ונקבל ש: $|A|=53$. לכן:

$$A^{-1}=\frac{1}{53}\begin{bmatrix}5 & 12 & -1\\ -12 & 3 & 13\\ 8 & -2 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{53} & \frac{12}{53} & -\frac{1}{53}\\ -\frac{12}{53} & \frac{3}{53} & \frac{13}{53}\\ \frac{8}{53} & -\frac{2}{53} & \frac{9}{53}\end{bmatrix}$$

כלל קרמר

נתונה מערכת משוואות $Ax=b$ כאשר A מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$ ו-b וקטור עמודה נתון.

משפט קרמר: למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד אם"ם $|A|\neq 0$ והפתרון היחיד נתון ע"י $x_i=\frac{|D_i|}{|A|}$, $(i=1,2,\dots,n)$, כאשר D_i היא המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת עמודה i ב-b.

דוגמא: פתרו בעזרת כלל קרמר את המערכת:

$$\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

פתרון: תחילה נחשב את $|A|$:

$$|A|=2\cdot\begin{vmatrix}9 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=2(27-20)-7(9-4)+3(15-9)=-3\neq 0 \qquad (|A|\neq 0)$$

לכן:

$$|D_1|=\begin{vmatrix}2 & 7 & 3\\ 2 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}=3,\quad |D_2|=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3,\quad |D_3|=\begin{vmatrix}2 & 7 & 2\\ 3 & 9 & 2\\ 1 & 5 & 1\end{vmatrix}=3$$

$$\Downarrow$$

$$x_1=\frac{|D_1|}{|A|}=\frac{3}{-3}=-1,\quad x_2=\frac{|D_2|}{|A|}=\frac{-3}{-3}=1,\quad x_3=\frac{|D_3|}{|A|}=\frac{3}{-3}=-1$$

$$\Downarrow$$

הפתרון הוא: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$