

תרגיל 2- אינפי 2 מדמ"ח

רשימת אינטגרלים:

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos b + \cos a \quad .2 \quad \int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad .1$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan b - \arctan a \quad .4 \quad \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|b| - \ln|a| \quad .3$$

1. השתמשו באינטגרל מסוים על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

$$.א \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$.ב \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}} \right)$$

$$.ג \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

$$.ד \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + n^k)$$

$$.ה \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)}$$

(רמז: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^m) = m \ln(a)$)

2. הוכיחו:

$$.א \quad \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2} \right) \leq \ln 2 \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} \right)$$

$$.ב \quad \left(\frac{1}{1+0.25^2} + \frac{1}{1+0.5^2} + \frac{1}{1+0.75^2} + \frac{1}{2} \right) \leq \pi \leq \left(1 + \frac{1}{1+0.25^2} + \frac{1}{1+0.5^2} + \frac{1}{1+0.75^2} \right)$$

3. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

(רמז: הסתכלו בקטע $[1, n]$.)