משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 2

סוגים שונים של מד"ר מסדר ראשון:

1.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

לצורך פתרון משתמשים בהצבה $z = \frac{y}{x}$

אז כן $y = xz$ וע"י גזירה מקבלים:

$$y' = z + xz' = f(z)$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \frac{dz}{dx} = f(z) - z$$

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$$

מבצעים אינטגרל, מוצאים את z וע"י כך את y.

<u>שאלה ממבחן:</u> (מועד א' תשע"ב, פרופ' ג. שלו.)

<u>שאלה 1 סעיף (ii)</u> פתור את המשוואה $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

לכל משוואה, יש למצוא את הפתרון הכללי, ועבור כל פתרון יש למצוא את הערכים של x עבורם הפתרון מוגדר.

<u>פתרון:</u> נחלק ב-x את שני האגפים ונקבל:

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

וזו משוואה מהצורה $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

נציב $y(x) = x \cdot z(x)$ ונגזור:

$$y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x)$$

נציב במד"ר ונקבל:

$$y' = \cancel{z(x)} + x z'(x) = \cancel{z} + \sqrt{1 - z^2} = f(z)$$

$$z'(x) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \arcsin(z(x)) = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow z(x) = \sin(\ln|x| + c)$$

נחזור מההצבה ונקבל

הפתרון הכללי: $\boxed{y(x) = x \cdot \sin(\ln|x| + c)}$

פתרון זה לא מוגדר עבור $x=0$ (בגלל ln)

ז"א הפתרון מוגדר לכל $x \neq 0$ ממשי.

---

2. $y' = f(ax+by)$

לצורך פתרון משתמשים בהצבה $z = ax+by$

וגוזרים לפי x: $z' = a + by' = a + bf(z)$

$$\Rightarrow \frac{dz}{a+bf(z)} = dx$$ ומכאן ניתן להמשיך כרגיל..

דוגמא: $y' = (x+y)^2$, $a=b=1$

אם כן, נציב $z = x+y$

והמשוואה הינה $y' = z^2$ כאשר $f(z) = z^2$

ע"י גזירה $z' = 1 + y' = 1 + z^2$

$$\Rightarrow \frac{dz}{1+z^2} = dx \Rightarrow \arctan(z) = x + c$$

דף 2

$$\Rightarrow \quad z=\tan(x+c)=x+y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y=\tan(x+c)-x}$$

3.

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

משוואה זו מחולקת לשני מקרים:

(i) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ במקרה זה נניח בה"כ

$$(a_2,b_2)=\lambda(a_1,b_1)$$

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=\tilde{f}(a_1x+b_1y)$$

דוגמא: $y'=\frac{6x+2y+1}{3x+y+1}$ כאן $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0$

$$y'=\frac{2(3x+y)+1}{3x+y+1}=f(3x+y)$$

נציב $z=3x+y \Rightarrow z'=3+y'=3+\frac{2z+1}{z+1}$

$$\frac{z+1}{5z+4}\,dz=dx \qquad /\cdot 5$$

$$\frac{5z+4+1}{5z+4}\,dz=5dx \Rightarrow z+\frac{\ln|5z+4|}{5}=5x+C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{3x+y+\frac{1}{5}\ln|5x+5y+4|=5x+C}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (ii)$$

במקרה זה נגדיר

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} u = x - \alpha \\ v = y - \beta \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{dv}}_{1} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{1} = \frac{dv}{du}$$

$$y' = \frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2 u + b_2 v + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right)$$

נרצה לאפס את הגורמים הקבועים במונה ובמכנה:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta = -c_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta = -c_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$

קיים פתרון (α,β) שכן הדטרמיננטה לעיל שונה מ-0.

ונקבל:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right) \underset{\text{חלוקה ב-}u\text{ מונה ומכנה}}{=} f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{v}{u}}{a_2 + b_2\frac{v}{u}}\right) = \tilde{f}\left(\frac{v}{u}\right)$$

נגדיר $z = \frac{v}{u} \implies uz = v \ \Big/ \frac{d}{du}$

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{dv}{du} = \tilde{f}\left(\frac{u}{v}\right) = \tilde{f}(z) \longrightarrow$$

אפשר להפריד משתנים ולפתור.

3 דף

פולאכי

$$y' = \frac{x+y-2}{x-y}$$

פתרון $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ ולכן נציב:

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$$

נשווה לאפס

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftarrow \quad \alpha = \beta = 1$$

$$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 1 \end{cases} \qquad y' = \frac{dv}{du}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+1+v+1-2}{u+1-v-1} = \frac{u+v}{u-v} = \frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}$$

נציב: $z = \frac{v}{u}$

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{dv}{du} = \frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}} \Rightarrow z + u\frac{dz}{du} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$''' \quad \arctan(z) - \frac{1}{2}\ln|1+z^2| = \ln|u| + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\arctan\left(\frac{y-1}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2\right| = \ln|x-1| + C}$$

---

4. משוואת ברנולי:

(שוויצי) Jakob Bernoulli

$$y' = a(x)y + b(x)y^{k+1} \qquad (k \neq 0, -1)$$

מקרים פשוטים

$$\begin{cases} y' = (a+b)y & \Leftarrow k=0 \text{ אם} \\ y' = a(x)y + b(x) & \Leftarrow k=-1 \text{ אם} \end{cases}$$

$\boxed{k \neq 0,-1} \Leftarrow$ מציבים $z = \frac{1}{y^k} \Leftarrow z' = -k y^{-k-1} \cdot y'$

$$\Leftarrow \boxed{z' = -k a(x) \cdot z - k b(x)}$$

דוגמא: תרגיל ממבחן לדוגמא (פרופסור יורם לוזון) קיץ.

שאלה 1 מחלק המשוואות: פתור $y'+\frac{y}{x}=(xy)^2$

פתרון: $y'=-\frac{1}{x}y+x^2y^{1+1}$ משוואת ברנולי

$\to k=1$

ונציב $z=\frac{1}{y}=y^{-1}$ $\Leftarrow$

$$z'=-\frac{1}{y^2}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}y+x^2y^2\right)}_{y'}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}-x^2=\frac{1}{x}\cdot z-x^2$$

משוואה לינארית לא הומוגנית

פיתרון חלק הומוגני $z'=\frac{z}{x}$ $\Leftarrow$ $z_h=kx$

מחפשים פתרון מהצורה $z_p=k(x)\cdot x$

$z_p'=k'(x)\cdot x+k(x)$ ... $z_p=-\frac{x^3}{2}$

$$\Rightarrow z=z_h+z_p=kx-\frac{x^3}{2}=\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\left(kx-\frac{x^3}{2}\right)^{-1}}$$

---

5. משוואת ריקטי: Jacopo Riccati (איטלקי)

$$y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x) \qquad (a,c\neq 0)$$

אם ידוע פתרון $y_0(x)$ נציב $y=y_0(x)+z(x)$

ונקבל משוואת ברנולי.

דוגמא: פתור $\frac{dy}{dx}=-2-y+y^2$. ננסה פתרון $y=2$ $\Leftarrow$ $y'=0$

$-2-2+2^2=0$ ✓

נציב $y=2+z$ ... ונגיע למ. ברנולי $z'=3z+z^2$

נציב $w=\frac{1}{z}$ ... $\boxed{y=2+\frac{3}{C\cdot e^{-3x}-1}}$

6. משוואת קלרו : Alexis Clairaut (צרפתי) 4/8/21

$$y = xy' + f(y')$$

פתרון: נגזור את המד"ר

$$\cancel{y'} = \cancel{y'} + xy'' + f'(y')\cdot y''$$

$$y''\left(x + f'(y')\right) = 0$$

חלוקה למקרים:

(i) $y'' = 0 \Rightarrow y' = \overset{\text{קבוע}}{\alpha}$ ← נציב במשוואה המקורית ונקבל

$$\boxed{y = \alpha x + f(\alpha)}$$

פתרון רגולרי של קלרו (קווים ישרים)

(ii) $x + f'(y') = 0 \Rightarrow$ פתרון סינגולרי של מ. קלרו והוא המעטפת של הפתרונות הרגולריים.

תרגיל: מצא מד"ר עבור כל הישרים במישור שמרחקם מהראשית הוא 1.

פתרון: נתבונן בישרים מהצורה $y = mx + n$

מרחק מהראשית:

$$d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|y - \overset{y'}{m}x|}{\sqrt{(y')^2+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad y - xy' = \pm\sqrt{(y')^2+1}$$

$$y = xy' \underbrace{\pm\sqrt{(y')^2+1}}_{f(y')} \longrightarrow$$ משוואת קלרו

פתרון רגולרי: $y' = \alpha \Rightarrow y = \alpha x + f(\alpha)$

$$= \alpha x \pm \sqrt{1+\alpha^2}$$

פתרון סינגולרי: $f(t) = \pm\sqrt{1+t^2}$

$$x + f'(y') = 0$$

$$x \pm \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} \Big|_{t=y'} = 0$$

$$x = \mp \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$$

פתרון המעטפת

המעטפת