פתרון תרגיל 9 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

1. מתקיים $L_i^j = -L_{ik}g^{kj}$ וגם $n_j = L_i^j X_i$. ביחד מקבלים את הדרוש.

2. קצת עבודה שחורה. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (2\cos\phi\cos\theta, 2\cos\phi\sin\theta, -2\sin\phi)\,, X_\theta = (-2\sin\phi\sin\theta, 2\sin\phi\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$\begin{gathered} g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi \rangle = 4\cos^2 t\cos^2\theta + 4\cos^2 t\sin^2\theta + 4\sin^2 t = 4 \\ g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta \rangle = 0 \\ g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = 4\sin^2\phi\sin^2\theta + 4\sin^2\phi\cos^2\theta = 4\sin^2\phi \end{gathered}$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

נחשב את איברי המטריצה (L_{ij}). וקטורי הנגזרות השניות:

$$\begin{gathered} X_{\phi\phi} = (-2\sin\phi\cos\theta, -2\sin\phi\sin\theta, -2\cos\phi) \\ X_{\phi\theta} = X_{\theta\phi} = (-2\cos\phi\sin\theta, 2\cos\phi\cos\theta, 0) \\ X_{\theta\theta} = (-2\sin\phi\cos\theta, -2\sin\phi\sin\theta, 0) \end{gathered}$$

נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$-X_\theta \times X_\phi = -\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\sin\theta & -2\sin\phi \\ -2\sin\phi\sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(4\sin^2\phi\cos\theta, 4\sin^2\phi\sin\theta, 4\cos\phi\sin\phi\right)$$

אם כן:

$$\|X_\theta \times X_\phi\| = \sqrt{16\sin^4\phi\cos^2\theta + 16\sin^4\phi\sin^2\theta + 16\cos^2\phi\sin^2\phi} = 4\sin\phi$$

ולכן:

$$\vec{n} = -\frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = -(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

כעת:

$$\begin{gathered} L_{22} = X_{\phi\phi}\cdot\vec{n} = -2\sin^2\phi\cos^2\theta - 2\sin^2\phi\sin^2\theta - 2\cos^2\phi = -2 \\ L_{21} = L_{12} = X_{\phi\theta}\cdot\vec{n} = 0 \\ L_{11} = X_{\theta\theta}\cdot\vec{n} = -2\sin^2\phi\cos^2\theta - 2\sin^2\phi\sin^2\theta = -2\sin^2\phi \end{gathered}$$

ולכן:

$$\left(L_{ij}\right) = \left(\begin{array}{cc} -2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right)$$

כעת, נחשב את העתקת ויינגרטן:

$$\left(L^i_j\right) = -\left(g^{ij}\right)\left(L_{ij}\right) = \left(\begin{array}{cc} 4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 4 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{cc} 2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

ולכן $K = \frac{1}{4}$.
נחשב את סמלי גאמא; אנו צריכים את:

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{4\sin^2\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{array}\right)$$

$$\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial\phi} = \left(\begin{array}{cc} 8\cos\phi\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} g_{11,2} & g_{12,2} \\ g_{21,2} & g_{22,2} \end{array}\right)$$

$$\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial\theta} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} g_{11,1} & g_{12,1} \\ g_{21,1} & g_{22,1} \end{array}\right)$$

ולכן:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = \cot\phi$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = -\sin\phi\cos\phi$$

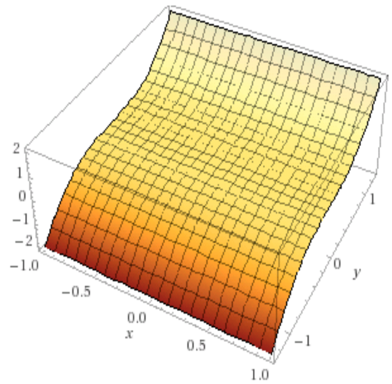
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = 0$$

ולכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\left\{\begin{array}{c} \phi'' + 2\cot\phi\cdot\phi'\theta' = 0 \\ \theta'' - \sin\phi\cos\phi\cdot\phi'\left(\theta'\right)^2 = 0 \end{array}\right.$$

3. המשטח שלנו הוא:



(א) פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X(u,v) = \big(u, v, v^3\big)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1,0,0), X_v = \big(0,1,3v^2\big)$$

מקדמי המטריקה הן:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle X_u, X_u\rangle = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v\rangle = 0 \\ g_{22} = \langle X_v, X_v\rangle = 1 + 9v^4 \end{gathered}$$

ולכן המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+9v^4 \end{pmatrix}$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu} = \vec{0}, X_{uv} = X_{vu} = \vec{0}, X_{vv} = (0,0,6v)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3v^2 \end{vmatrix} = \big(0, -3v^2, 1\big)$$

$$\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{\big(0,-3v^2,1\big)}{\sqrt{1+9v^4}}$$

איברי המטריצה (L_{ij}) הם:

$$L_{11} = L_{21} = L_{22} = \langle X_{uu}, \vec{n}\rangle = \langle X_{uv}, \vec{n}\rangle = 0$$

$$L_{22} = \langle X_{vv}, \vec{n}\rangle = \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}}$$

לכן המטריצה היא:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}} \end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצה $\left(L^i_j\right)$:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+9v^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{(1+9v^4)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

ולכן עקמומיות גאוס היא:

$$K = \det\left(L^i_j\right) = 0$$

שימו לב שמקומית המשטח די דומה למישור.
*כבר כשרואים ש$-$ $\left(L^i_j\right)$ אינה הפיכה אפשר כמובן לומר שהעקמומיות היא 0.

(ב) נשתמש במשוואות הגיאודזיות:

$$\begin{cases} \left(\alpha^1\right)'' + \Gamma^1_{ij}\left(\alpha^i\right)'\left(\alpha^j\right)' = 0 \\ \left(\alpha^2\right)'' + \Gamma^2_{ij}\left(\alpha^i\right)'\left(\alpha^j\right)' = 0 \end{cases}$$

סמלי גאמא הם:

$$\Gamma^2_{22} = \frac{18v^3}{1+9v^4}$$

והשאר מתאפסים. המשוואות הן:

$$\begin{cases} \left(\alpha^1\right)'' = 0 \\ \left(\alpha^2\right)'' + \frac{18v^3}{1+9v^4}\left(\alpha^2\right)'\left(\alpha^2\right)' = 0 \end{cases}$$

ואם נדבר בשפת u, v:

$$\begin{cases} (u)'' = 0 \\ (v)'' + \frac{18v^3}{1+9v^4}\left(v'\right)^2 = 0 \end{cases}$$

על L, $y = z = 0$, ולכן $v = 0$ והמשוואה השנייה אכן מתקיימת.
נותרנו עם:

$$u'' = 0$$

לכן $u(t) = at + b$. כלומר, העקומה הגיאודזית היא:

$$\alpha(t) = (at + b, 0, 0)$$

ואם ניקח למשל $a = 0, b = 1$ אכן נקבל את L.

דרך נוספת: מכיוון ש$-L$ קו ישר (ציר ה$-x$) פרמטריזציה β שלו תקיים $\beta'' = 0$, ולכן תהיה תלויה ליניארית בנורמל בלבד. לכן זו עקומה גיאודזית.

4. פרמטריזציה של החרוט היא: $X(\theta,\phi) = (\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, k\phi)$.
וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\cos\theta, \sin\theta, k), X_\theta = (-\phi\sin\theta, \phi\cos\theta, 0)$$

ראינו בעבר שהנורמל הוא:

$$\frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(k\cos\theta, k\sin\theta, -1\right)$$

וקטורי הנגזרות של הנורמל הם:

$$\vec{n}_\phi = 0 = 0\cdot X_\theta + 0\cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(-k\sin\theta, k\cos\theta, 0\right) = \frac{k}{\phi\sqrt{1+k^2}}\cdot X_\theta + 0\cdot X_\phi$$

לכן:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{k}{\phi\sqrt{1+k^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. קצת לגזור לא נורא.

(א) נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$X_u = \left(\cos v, \sin v, 0\right), X_v = \left(-u\sin v, u\cos v, k\right)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle X_u, X_u\rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v\rangle = -u\cos v\sin v + u\cos v\sin v + 0 = 0 \\ g_{22} = \langle X_v, X_v\rangle = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + k^2 = u^2 + k^2 \end{gathered}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה נתונה על ידי המטריצה:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+k^2 \end{pmatrix}$$

נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & k \end{vmatrix} = (k\sin v, -k\cos v, u)$$

לכן:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{k^2\sin^2 v + k^2\cos^2 v + u^2} = \sqrt{k^2+u^2}$$

ולכן הנורמל הוא:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{u^2+k^2}}\left(k\sin v, -k\cos v, u\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu}=(0,0,0)\,,X_{uv}=(-\sin v,\cos v,0)\,,X_{vv}=(-u\cos v,-u\sin v,0)$$

נחשב את איברי המטריצה (L_{ij}):

$$\begin{gathered}L_{11}=X_{uu}\cdot\vec{n}=0\\ L_{21}=L_{12}=X_{uv}\cdot\vec{n}=-\tfrac{1}{\sqrt{k^2+u^2}}\left(k\cos^2 v+k\sin^2 v\right)=-\tfrac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}\\ L_{22}=X_{vv}\cdot\vec{n}=\tfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(-uk\sin v\cos v+uk\sin v\cos v\right)=0\end{gathered}$$

ולכן:

$$(L_{ij})=\begin{pmatrix}0 & -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}\\ -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} & 0\end{pmatrix}$$

כעת, המטריצה ההופכית של (g_{ij}) היא:

$$(g^{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{k^2+u^2}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$(L^i_j)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{k^2+u^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}\\ \frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}\\ \frac{k}{(k^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} & 0\end{pmatrix}$$

(ב) זהו משטח סיבוב; התבנית היסודית הראשונה היא:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}(a\cos\phi+b)^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta=(-(a\cos\phi+b)\sin\theta,(a\cos\phi+b)\cos\theta,0)$$

$$X_\phi=(-a\sin\phi\cos\theta,-a\sin\phi\sin\theta,a\cos\phi)$$

נחשב את הנורמל ונקבל:

$$\vec{n}=\frac{X_\theta\times X_\phi}{\|X_\theta\times X_\phi\|}=(\cos\phi\cos\theta,\cos\phi\sin\theta,\sin\phi)$$

נחשב את וקטורי הנגזרות השניות, נכפיל בנורמל ונקבל:

$$(L_{ij})=\begin{pmatrix}-a\cos\phi\,(a\cos\phi+b) & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$(L^i_j)=\begin{pmatrix}\frac{\cos\phi}{a\cos\phi+b} & 0\\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$$