תרגיל 3 בגיאומטריה דיפרנציאלית.

איזומטריות:

1. כמה איזומטריות ישנן ששולח את האילפסואיד $x^2+y^2+2z^2=3$ לאליפסואיד $\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)+\frac{2}{3}(xy+xz+yz)=3$ ואת המישור $x=1$ למישור $x-y=\sqrt{2}$:

אנחנו שמים לב ששני האליפסואידים קנוניים (המרכז שלהם בראשית הצירים) ולכן האיזומטריה חייבת לשלוח את ראשי הצירים לעצמו. זה אומר שהאיזומטריה היא מהצורה $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ עבור איזשהי $A\in O_3(\mathbb{R})$ (מטריצה אוניטרית). נמצא את כל המטריצות A האפשריות:

הנקודה $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ מייצגת וקטור שמאונך למישור הראשון, וגם נקודה על המישור הראשון, ולכן ביא חייבת ללכת לווקטור שמאונך למישור השני – וקטור מהצורה $\begin{pmatrix}a\\-a\\0\end{pmatrix}$, שהוא גם נקודה על המישור השני – זה יכול להיות רק $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

התבניות של האליפסואידים הן $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$. בכל תבנית 2 הוא ערך עצמי מריבוי 1.

וקטור עצמי נורמלי מערך עצמי 2 של התבנית הראשונה חייב ללכת לוקטור עצמי נורמלי מערך עצמי 2 של התבנית השנייה. ז"א ש- $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ חייב ללכת ל- $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ או $-\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

לסיום, הווקטור $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ נורמלי ומאורך ל- $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ (השלמה לבסיס אורטונורמלי) ולכן האיזומטריה חייבת לקחת אותו לוקטור נורמלי שמאונך ל- $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, וקטור כזה יקיים $x-y=0$ ו- $x+y+z=0$ ולכן יהיה מהצורה $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}a$, ולפי נורמליות זה יהיה $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. A היא אם כך מטריצ מעבר בסיס מו $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ל- $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ולכן קיבלנו 4 אופציות למטריצה A (למשל $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$)

2. כמה איזומטריה ששולח את ההיפרבולואיד $x^2-y^2-z^2=7$ להיפרבולואיד $4xy+2\sqrt{3}yz+2z^2=3$:

אין. איזומטריה – הזזה, סיבוב ושיקוף של המרחב לא באמת תשנה את צורת החרוט, היא רק תזיז ותסובב אותו. נפתור את המשוואה השנייה:

המטריצה היא $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & \sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 2\end{pmatrix}$, הפולינום האופייני $\lambda^3-9\lambda+8=(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)\left(\lambda+\frac{\sqrt{33}-1}{2}\right)$

(מוצאים את $(\lambda-1)$ בניסיונות והיתר בבינום). ובבסיס סטנדרטי נקבל $\tilde{x}^2+\frac{1+\sqrt{33}}{2}\tilde{y}^2-\frac{\sqrt{33}-1}{2}\tilde{z}^2=3$ בפרט במשוואה הראשונה מגדירה היפרבולואיד חד יריעתי והשנייה דו יריעתי. ולכן איזומטריה לא יכולה לשלוח אחד לשני.

עקומות במישור – טכני:

3. חקרו את העקומה $y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ (למי שלא מכיר $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$)

פרמטריזציה רגילה - $\gamma(t)=\left(t,a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$, $\gamma'(t)=\left(1,\sinh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$, $\gamma''(t)=(0,)$

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)}=\sqrt{\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)}=\cosh\left(\frac{t}{a}\right)(>0)$$

פרמ' מהירות יחידה:

$t(s)$ צריכה להיות הפיכה, וההופכית $s(t)$ היא מקיימת $s'(t)=\|\gamma'(t)\|$ ולכן:

$$s(t)=\int_0^t\|\gamma'(\tau)\|d\tau=\int_0^t\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right)d\tau=a\sinh\left(\frac{\tau}{a}\right)\Big|_0^t=a\sinh\left(\frac{t}{a}\right)$$

ו- $\frac{s}{a}=\sinh\left(\frac{t}{a}\right)$ ולכן $\frac{t}{a}=\operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right)$ ו- $t(s)=a\operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right)$.

בפרט

$$\tilde{\gamma}(s)=\gamma(t(s))=\left(a\operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right),a\cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right)\right)\right)$$

$$=\left(a\operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right),a\sqrt{1+\sinh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right)\right)}\right)=\left(a\operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right),a\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}\right)$$

$$=\left(a\operatorname{arcsinh}\left(\frac{s}{a}\right),\operatorname{sgn}a\sqrt{a^2+s^2}\right)$$

מצאנו, עקומה במהירות יחידה. אבל היא מסובכת ולא כדאי לעבוד איתה.

עקמומיות:

$$k(t)=\frac{\det\begin{pmatrix}| & |\\ \gamma'(t) & \gamma''(t)\\ | & |\end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \sinh\left(\frac{t}{a}\right) & \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\end{pmatrix}}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)^3}=\frac{1}{a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)^2}$$

אינוולט, אוולט:

ישירות לפי הנוסחא האינוולט הוא

$$I(t)=\gamma(t)-\frac{s(t)}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)=\left(t,a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)-\frac{a\sinh\left(\frac{t}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)}\left(1,\sinh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

$$=\left(t-a\tanh\left(\frac{t}{a}\right),a\frac{\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)-\sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)}\right)=\left(t-a\tanh\left(\frac{t}{a}\right),\frac{a}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)}\right)$$

בעוד שהאוולט הוא

$$E(t)=\gamma(t)+\frac{\|\gamma'(t)\|^2}{\det\begin{pmatrix} | & | \\ \gamma'(t) & \gamma''(t) \\ | & | \end{pmatrix}}\left(-\gamma_2'(t),\gamma_1'(t)\right)$$

$$=\left(t,a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)+a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\left(-\sinh\left(\frac{t}{a}\right),1\right)$$

$$=\left(t-a^2\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\sinh\left(\frac{t}{a}\right),2a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

4. חשב את העקמומיות של העקומה $y=\sqrt{\cos x}$ (בתחום ההגדרה שלה, שהוא $\cos x>0$)

נחשב עקמומיות $F(x,y)=y-\sqrt{\cos x}=0$ לפי הנוסחא

$$k(x,y)=\frac{|D_BF|}{|\nabla F|^3}=\frac{\left|F''_{yy}{F'_x}^2+F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{xx}{F'_y}^2\right|}{\sqrt{{F'_x}^2+{F'_y}^2}^3}$$

נחשב: $F'_y=1$ ולכן $F''_{yy}=F''_{xy}=0$, $F'_x=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ ו-

$$F''_{xx}=-\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{\sin^2 x}{4\sqrt{\cos x}^3}=\frac{\cos^2 x-1}{4\sqrt{\cos x}^3}-\frac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}=-\frac{\sqrt{\cos x}}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\cos x}^3}$$

כעת נקבל מהנוסחא

$$k(x,y)=\frac{\frac{\sqrt{\cos x}}{2}+\frac{1}{4\sqrt{\cos x}^3}}{\sqrt{\left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right)^2+1}^3}=\frac{2\cos^2 x+1}{4\sqrt{\cos x}^3\sqrt{\frac{\sin^2 x}{4\cos x}+1}^3}=\frac{2\cos^2 x+1}{=\sqrt{4\sin^2 x\cos^2 x+16\cos^3 x}^3}$$

ביטוי מורכב.

5. ...

עקומות במישור – תיאורטי:

6. עקומה $\gamma(s):[0,L]\to\mathbb{R}^2$ (במהירות יחידה) סגורה נמצאת כולה בתוך העיגול $x^2+y^2\le R^2$, הוכיחו שיש נקודה בה $|k(s)|\ge\frac{1}{R}$:

נתון לנו רק שהעקומה סגורה וש- $\|\gamma(s)\| \le R$. בנוסף, עקב מהירות יחידה $\|\gamma'(s)\| = 1$ (אבל ניתן למתוא פרמ' כזו לכל עקומה). ננסה להסיג חסם על $|k(s)|$:

כרגיל ניתן לקבל את התוצאות הבאות:

א. $\langle\gamma'(s),\gamma'(s)\rangle = 1$ ולכן הנגזרת של זה היא 0, ולפי כלל לייבניץ

$$0 = \frac{d}{ds}\langle\gamma'(s),\gamma'(s)\rangle = \langle\gamma'(s),\gamma''(s)\rangle + \langle\gamma''(s),\gamma'(s)\rangle = 2\langle\gamma'(s),\gamma''(s)\rangle$$

ולכן $\gamma'(s)$ מאונך ל- $\gamma''(s)$.

ב. בנוסף לפי לייבניץ

$$\frac{d}{ds}\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle = \langle\gamma(s),\gamma''(s)\rangle + \langle\gamma'(s),\gamma'(s)\rangle = \langle\gamma(s),\gamma''(s)\rangle + 1$$

השיוויון הראשון לא כולל את $\gamma(s)$ ולכן לא מתקשר לנתון, לעומת זאת השני יכול לתת חסם על העקמומיות (שהיא $\|\gamma''(s)\|$) לפי אי שיוויון קושי-שוורץ' (-הולדר-ביאקובסקי-וכו')

$$\|\gamma''(s)\|R = \|\gamma(s)\|\|\gamma''(s)\| \ge |\langle\gamma(s),\gamma''(s)\rangle| = \left|\frac{d}{ds}\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle - 1\right|$$

מכיוון שמודבר רק בעקומות סגורה, ניתן לקבל עשות אינטרגל של ביטויים לאורך העקומה (וזה לרוב מה שיש לעשות במקרה של עקומות סגורות)

$$\int_0^L \|\gamma''(s)\|R ds \ge \int_0^L \left|\frac{d}{ds}\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle - 1\right| ds \ge \left|\int_0^L \left(\frac{d}{ds}\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle - 1\right) ds\right|$$
$$= \left|\int_0^L \frac{d}{ds}\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle ds - \int_0^L ds\right| = |\langle\gamma(L),\gamma'(L)\rangle - \langle\gamma(0),\gamma'(0)\rangle - L|$$

מכיוון שזו עקומה חלקה סגורה $\gamma(L) = \gamma(0)$ ו- $\gamma'(L) = \gamma'(0)$ ולכן החישוב נותן $\int_0^L \|\gamma''(s)\|R ds \ge L$ וזה יתתכן רק אם יש עבורו $\|\gamma''(s)\|R \ge 1$, ז"א $|k(s)| \ge \frac{1}{R}$.

7. תהי פונקציה חלקה $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, נגדיר עקומה $\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(\phi(u))\, du, \int_0^s \sin(\phi(u))\, du\right)$:

א. הוכיחו כלפרמטריזציה הזאת מהירות יחידה, וחשבו עקמומיות:

$\gamma'(s) = \left(\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s))\right)$ ולכן $\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\cos^2(\phi(s)) + \sin^2(\phi(s))} = 1$. בקשר לעקמומיות נסובב את $\gamma'(s)$ בתשעים מעלות שמאלה ונקבל $N(s) = \left(-\sin(\phi(s)), \cos(\phi(s))\right)$ ואילו $\gamma''(s) = \left(-\phi'(s)\sin(\phi(s)), \phi'(s)\cos(\phi(s))\right) = \phi'(s)N(s)$ ולכן העקמומיות היא $\phi'(s)$.

ב. מצא עקומה $\gamma(s)$ שהעקמומיות שלה בכל נקודה היא $k(s) = s$.

לפי א', אם פונקציה $\phi(s)$ מקיימת $\phi'(s) = s$ (למשל $\phi(s) = \frac{s^2}{2}$) אזי $\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(\phi(u))\, du, \int_0^s \sin(\phi(u))\, du\right)$ תקיים $k(s) = \phi'(s) = s$.

ולכן $\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{2}\right) du, \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{2}\right) du\right)$ מקיימת את הנדרש.

עקומות במרחב – טכני:

8. א. מצא פרמ' מהירות יחידה לעקומה $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ (סליל)

ב. הוכח שהיא מקיימת $\langle\tilde{\gamma}'(s), u\rangle = c$ עבור וקטור u וסקאלר c קבועים כלשהם.

א. $\gamma'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$ ולכן $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{a^2+b^2}$. פרמ' מהירות יחידה $t(s)$ צריכה לקיים $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ולכן $t(s)=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ו-

$$\tilde{\gamma}(s)=\gamma\big(t(s)\big)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

יעבוד.

ב. $\tilde{\gamma}'(s)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\right)$, ערך ה- z של הביטוי קבוע, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ וזה בדיוק אומר שהמכפלה הפנימית שלו אם $(0,0,1)$ תמיד תהיה $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

9. חקרו את העקומה $\gamma(t)=(\quad)$:

עקומות במרחב – תיאורטי:

10. הוכיחו שאם לעקומה $\gamma(s)$ עקמומיות שאינה מתאפסת $k(s)\neq 0$, ופיתול שכן מתאפס $\tau(s)=0$, אז העקומה נמצאת במישור.

לפי פרנה $B'(s)=-\tau N=0$ ולכן $B(s)=\gamma'(s)\times N(s)$ קבוע B. בפרט $\langle\gamma'(s),B\rangle=0$ לכל s (ז"א שכיוון ההתקדמות של הפונקציה תמיד מאונך ל- B). אם נגדיר $f(s)=\langle\gamma(s)-\gamma(0),B\rangle$ אזי $f(0)=0$ ו- $f'(s)=\langle\gamma'(s),B\rangle+\langle\gamma(s)-\gamma(0),0\rangle=0$ ולפי מד"ר $f(s)\equiv 0$.
יוצא ש- $\gamma(s)$ נמצאת על המישור המאונך ל- B שעובר ב- $\gamma(0)$.

11. תהי עקומה $\gamma(s)$ במרחב אם עקמומיות $k(s)\neq 0$ ופיתול $\tau(s)$, נסמן $\gamma_T(s)=T\big(\gamma(s)\big)$ עבור איזושהי איזומטריה T, מה ניתן לומר על העקמומיות והפיתול של $\gamma_T(s)$?

מתקיים ש $T(v)=Av+b$ עבור וקטור b ומטריצה אורתוגונלית A קבועים. ולכן $\gamma_T(s)=A\gamma(s)+b$
לפי כלל השרשרת $\gamma_T'(s)=A\gamma'(s)$, $\gamma_T''(s)=A\gamma''(s)$ ולכן $\|\gamma_T''(s)\|=\|A\gamma''(s)\|=\|\gamma''(s)\|$ (זו תכונה של מטריצות אורתוגונליות) ולכן ל- γ ו- γ_T אותה עקמומיות.

בשביל לחשב פיתול צריך למצוא $\|\gamma_T'(s)\times\gamma_T''(s)\|$, אבל זה פשוט שטח המקבילית הנוצרת ע"י $\gamma_T'(s)=A\gamma'(s)$ ו- $\gamma_T''(s)=A\gamma''(s)$, וזה תלוי רק באורך של $A\gamma'(s)$ ו- $A\gamma''(s)$ והזווית בניהם. כפל במטריה אורתוגונלית לא משנה אורכים וזוויות, ולכן

$$\|\gamma'(s)\times\gamma''(s)\|=\|A\gamma'(s)\times A\gamma''(s)\|=\|\gamma_T'(s)\times\gamma_T''(s)\|$$

הנוסחא לפיתול היא אם כן

$$\tau_T(s) = \frac{\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ A\gamma_T'(s) & A\gamma_T''(s) & A\gamma_T'''(s) \\ | & | & | \end{pmatrix}}{\|\gamma_T'(s) \times \gamma_T''(s)\|^2} = \frac{\det\left(A \cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ \gamma_T'(s) & \gamma_T''(s) & A\gamma_T'''(s) \\ | & | & | \end{pmatrix}\right)}{\|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|}$$

$$= \frac{\det A \cdot \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \gamma_T'(s) & \gamma_T''(s) & A\gamma_T'''(s) \\ | & | & | \end{pmatrix}}{\|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|} = \det A\, \tau(s)$$

יוצא שאם $\det A = 1$ (האיזומטריה שומרת אוריאנטציה) הפיתול נשמר ואם $\det A = -1$ (האיזומטריה הופכת אוריאנטציה) אז הפיתול משנה סימן.