פתרון - מועד א'

חלק ב':

1. הוכיחו או הפריכו (הפרכה=דוגמה נגדית!)

א. תהינה : $A\in\mathbb{R}^{6\times5}, B\in\mathbb{R}^{5\times6}$. אזי $|AB|=0$. (10 נקודות)

הוכחה:

$rank(AB)\le rank(A)\le 5$, ולכן המטריצה AB אינה הפיכה (שכן הדרגה שלה לא מקסימלית) ולכן $|AB|=0$.

ב. יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ כך ש- A הפיכה. אזי לכל וקטור $b\neq 0$, למערכות $Bx=b, ABx=b$ יש אותם פתרונות. (10 נקודות)

הפרכה:

נבחר את B להיות מטריצת היחידה 2×2 ואת A כל מטריצה הפיכה 2×2 שהיא לא היחידה. למשל: $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. קל לראות שלשתי המערכות פתרונות שונים.

ג. V מ"ו, $U_1,U_2,U_3\le V$ תתי מרחבים. אם $U_1\oplus U_2=V$ ו- $U_1\oplus U_3=V$ אזי $U_3=U_2$. (10 נקודות)

הפרכה:

$$U_1=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\},U_2=\{(0,y):y\in\mathbb{R}\},U_3=\{(t,t):t\in\mathbb{R}\}$$

2. תהי $T:V\to V$ הע"ל המקיימת $T^2=Id$.

א. הוכיחו : T הפיכה (5 נקודות)

ב. הוכיחו ש: $\ker(I-T)=\mathrm{Im}(I+T), \quad \ker(I+T)=\mathrm{Im}(I-T)$ (10 נקודות)

ג. הוכיחו כי $V=\ker(I+T)\oplus\ker(I-T)$ (10 נקודות)

ד. חשבו את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס $B\subseteq V$ המורכב מאיחוד שני הבסיסים של $\ker(I+T),\ker(I-T)$ (5 נקודות)

פתרון:

נניח כי $charF\neq 2$, אחרת ניתן להפריך את התרגיל.

א. לפי ההגדרה, T הפיכה אם"ם קיימת העתקה לינארית S כך ש $ST=TS=Id$. במקרה זה נתון לנו $T^2=TT=Id$, לכן אם ניקח $S=T$ נקבל את הדרוש.

ב. נשים לב כי $(I-T)(I+T)=I(I+T)-T(I+T)=I+T-T-T^2=I-I=0$ לכן נובע כי $\mathrm{Im}(I+T)\subseteq\ker(I-T)$.

בכיוון ההפוך, נניח $v\in\ker(I-T)$, לכן מתקיים $(I-T)v=0$ ולכן $v=Tv$.

$(I+T)\frac{v}{2}=\frac{v}{2}+\frac{Tv}{2}=v$ ולכן $v\in\operatorname{Im}(I+T)$ ולכן $\operatorname{Im}(I+T)\supseteq\ker(I-T)$.

ביחד קיבלנו $\operatorname{Im}(I+T)=\ker(I-T)$, הנוסחא השנייה נכונה באופן דומה.

ג. לפי סעיף ב' מספיק להוכיח כי $V=\ker(I+T)\oplus\operatorname{Im}(I+T)$. ברור ש $\ker(I+T)+\operatorname{Im}(I+T)\subseteq V$ לכן מספיק להוכיח כי $\dim\left[\ker(I+T)+\operatorname{Im}(I+T)\right]=\dim V$ על מנת להוכיח כי $\ker(I+T)+\operatorname{Im}(I+T)=V$. על מנת להראות כי זה סכום ישר יש להוכיח שהחיתוך הוא אפס.

$v\in\ker(I+T)\Leftrightarrow v+Tv=0\Leftrightarrow Tv=-v$ מצד שני, לפי סעיף ב',
$v\in\operatorname{Im}(I+T)\Leftrightarrow v\in\ker(I-T)\Leftrightarrow Tv=v$. לכן
$v\in\ker(I+T)\cap\operatorname{Im}(I+T)\Rightarrow Tv=v=-v\Rightarrow v=0$ (זה נכון כי המאפיין אינו 2).

לפי **משפט המימדים**

$$\dim\left[\ker(I+T)+\operatorname{Im}(I+T)\right]=\dim\ker(I+T)+\dim\operatorname{Im}(I+T)-\dim\left[\ker(I+T)\cap\operatorname{Im}(I+T)\right]=$$
$$=\dim\ker(I+T)+\dim\operatorname{Im}(I+T)-0=\dim V$$

כאשר המעבר האחרון הינו לפי **משפט הדרגה**.

הראנו אם כך את כל מה שתכננו, וזה מוכיח את המשל.

ד. כפי שראינו בסעיפים קודמים, כל איבר בבסיסים האלה נשלח לעצמו או לנגדי של עצמו (שימו לב שהם לא חייבים להיות שווי גודל) ולכן המטריצה המייצגת תהיה מטריצה אלכסונית שעל האלכסון שלה יש אחדות ומינוס אחדות (הרי הייצוג של כל וקטור בבסיס כצירוף לינארי של איברי הבסיס הוא אחד במקום של הוקטור ואפס בכל מקום אחר).

3. אין קשר בין הסעיפים:

א. פתרו את המשוואה $\frac{1}{z}-4|z|=0$ ($z\in\mathbb{C}$). (8 נקודות)

ב. פתרו מעל $\mathbb{Z}_7$: $x^4+x^3-x^2+3x+2=0$. (7 נקודות)

ג. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ סימטרית והפיכה שחלק מרכיביה ידועים וחלקם לא. נתון שמתקיים:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} * & -3 & * \\ * & * & 1 \\ 1 & * & * \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} * & -1 & * \\ * & * & 4 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

מצאו את האיברים המסומנים ב * וכתבו את המטריצות המלאות. (10 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א. $\frac{1}{z}-4|z|=0$. נסמן z=x+iy ונשים לב כי $z\neq 0$, כלומר לא יתכן כי $x=0\wedge y=0$.

נציב z=x+iy ונרחיב את השבר $\frac{1}{z}$ בצמוד לו:

$$\frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=4|x+iy|$$
$$\Downarrow$$
$$x-iy=4(x^2+y^2)|x+iy|$$

נשים לב כי אגף ימין הוא מספר ממשי ולכן גם המספר המרוכב המתואר באגף שמאל חייב להיות ממשי ויתקיים y=0. לכן:

$$x=4x^2|x|$$

(*)שוב נשים לב כי אגף ימין הוא מספר חיובי (ממש, כי אם y=0 אז x לא) ולכן נסיק שאגף שמאל (x=) הוא מספר חיובי וכמן כן נצמצם את המשוואה ב-x:

$$\frac{1}{4}=x|x|=x^2$$
$$\Downarrow$$
$$x=\frac{1}{2}$$

(בלי הפיתרון $-\frac{1}{2}$ בגלל (*)).

ב.

$$x^4+x^3-x^2+3x+2=x^4-5x^3-x^3+x^2+5x^2-5x+x-5=(x-5)(x^3-x^2+x+1)=$$
$$(x-5)(x^3-2x^2+x^2-2x+3x-6)=(x-5)(x-2)(x^2+x+3)=0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$x_1=5$ $\quad x_2=2$ $\quad$ *לא פריק מעל* Z_7

ג. A סימטרית, אז גם A^{-1} סימטרית היות ו- $A^{-1} = \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$ ולכן כבר ניתן לומר כי:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & b & 4 \\ 0 & 4 & c \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} x & -3 & 1 \\ -3 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

כמו כן ידוע כי:

$$I = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & b & 4 \\ 0 & 4 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -3 & 1 \\ -3 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+3 & -3a-y & a-1 \\ -x-3b+4 & 3+by+4 & -1+b+4z \\ -12+c & 4y+c & 4+cz \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} &a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ &-12+c=0 \Rightarrow c=12 \\ &4y+c=4y+12=0 \Rightarrow y=-3 \\ &3+by+4=3-3b+4=1 \Rightarrow b=2 \\ &xa+3=x+3=1 \Rightarrow x=-2 \\ &4+cz=4+12z=1 \Rightarrow z=-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ובסה"כ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4. נתונות הקבוצות $B=\{(1,-1,0),(1,1,0),(1,1,1)\}\subseteq\mathbb{R}^3$ ו $C=\{(2,1),(1,1)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ כמו כן

נתונה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ הע"ל המוגדרת לפי $T(x,y,z)=(x-y+z,x+2y-z)$

א. הוכיחו כי C,B בסיסים של $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ בהתאמה תוך שימוש בדטרמיננטה.

ב. חשבו את המטריצה $[T]_C^B$.

ג. נתונה $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת $[S]_C^B=\begin{pmatrix}4&0&2\\8&-6&-1\end{pmatrix}$, מצאו את ההעתקה בצורה מפורשת (כלומר, חשבו את הביטוי S(x,y,z)=).

ד. מצאו הע"ל $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כך ש $HT=S$.

<u>פתרון</u>

ראשית שימו לב כי את ההעתקה T ניתן להציג על ידי :

$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, כלומר כפל במטריצה , כאשר המטריצה הכופלת

מקיימת גם : $[T]_S^S=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$, כאשר S מייצגים בסיסים סטנדרטיים בהתאמה למרחבים $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2$.

א. חישוב הדטרמיננטות של מטריצות ששורותיהן/עמודותיהן הן הוקטורים הנתונים :

$\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}$ מניב דטרמיננטות שונות מאפס ומכאן נסיק ששורות מטריצות אלו בת"ל.נקבל וקטורים בת"ל שמספרם כמימד המרחבים הנ"ל - $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2$ ולכן בסיסים למרחבים אלו.

ב. לפי הגדרה של מטריצה מייצגת של העתקה ביחס לבסיסים נתונים נקבל:

$$[T]_C^B=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]_C\ \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_C\ \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_C\right)=\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}_C\ \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}_C\ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_C\right)$$

$$=\begin{pmatrix}3&-3&-1\\-4&6&3\end{pmatrix}.$$

כאשר לשיוויון האחרון הגענו אחרי מציאת וקטורי הקואורדינאטות של תמונות איברי הבסיס – על ידי פיתרון מערכות משוואות (או ניחוש , שאינה "שיטה" כללית!).

ג.נמצא את המטריצה $[S]_S^S$ כאשר כאשר הבסיסים ביחס אליהם היא מחושבת הם הבסיסים הסטנדרטיים בהתאמה למרחבים $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2$.

נשתמש בנוסחא הבאה: $(*)\ [S]_S^S=[I]_S^C[S]_C^B[I]_B^S$, בעזרת הזהות:

ולאחר חישוב סטנדרטי של $[I]_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר , $([I]_S^B)^{-1} = [I]_B^S$

המטריצה ההפוכה נקבל: $([I]_S^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

נקבל לכן ב $(*)$ למעלה כי: $[S]_S^S = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 9 \\ 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$ ונסיק כי :

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [S]_s^s \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_S = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 9 \\ 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - 11y + 9z \\ 3x - 9y + 7z \end{pmatrix}$$ (תזכורת:

העתקה לינארית $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ מיוצגת בעצם על ידי מטריצה מייצגת ביחס לבסיסים הסטנדרטיים ככפל מטריצה ...) .

ד. יש למצוא העתקה כך ש: $[H]_S^S[T]_S^S = [S]_S^S$ (שוב – ביחס לבסיסים הסטנדרטיים!) ,נמצא מטריצה: $[H]_S^S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.ונקבל כפיתרון את: $[H]_S^S = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, כלומר:

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 2y \\ 5x - 2y \end{pmatrix}$$