

83-110 אלגברה ליניארית
סמסטר א', תשס"ה—מועד ב'
31.03.05

לקבלת כל הנקודות הציגו את כל העבודה הדרושה בפתרון. יש לנמק כל חישוב נדרש. חומר עזר ומחשבי כיס אינם מותרים. משך הבחינה 2.5 שעות. בהצלחה!!

1. [20 נק'] בניח ש $A = LU$ כאשר:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a. מה המימדים של 4 תתי-המרחב היסודיים?
 b. מצאו בסיסים לכל אחד מתתי-המרחב האלו.

2. [20 נק'] יהיו $A = \begin{bmatrix} .7 & .5 \\ .3 & .5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- a. חשבו $\mathbf{u}_{20} = A^{20}\mathbf{u}_0$.
 b. עבור אותו A , לאיזה מספרים ממשיים c יש התכונה
 ש $(A - cI)^n \rightarrow 0$ כאשר $n \rightarrow \infty$.
 c. מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של $A^{-1} + A^{20}$
 בלי לחשב את A^{-1} .

3. [20 נק'] אמת או שקר, אין צורך להסביר את תשובתך. 4 נקודות לתשובה נכונה, -1 לכל טעות:

- a. תהי A מטריצה $n \times n$ ריבועית. נכון ש $\det A = \det A^T$.
 b. תהי A מטריצה $m \times n$ עם עמודות בלתי-תלויות ליניאריות.
 אז $A^T A$ היא מטריצה חיובית.
 c. אם כל שני ווקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית של A
 הם ניצבים, אז A היא מטריצה סימטרית.
 d. אם A היא מטריצה סימטרית, אז הערכים העצמיים של A
 הם גם הערכים הסינגולריים של A .
 e. המרחב העמודות של A מוכל במרחב העמודות של AB .

4. [20 נק'] תהי A_n המטריצה הריבועים עם 1-ים על האלכסון הראשי
 $i - j = 0$, $i - j = 1$ או $i - j = -1$. כך ש:

$$A_1 = [1], A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. תהי $d_n = \det A_n$. מצאו a, b כך ש $d_n = ad_{n-1} + bd_{n-2}$.
b. מצאו נוסחה כללית ל d_k עבור $k = 1, 2, \dots$. (ניתן לתאר את איך
שנח לכם).

5. [20 נק'] מצאֵי מטריצה B כך ש $B^T B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_A$. רמז: מצאֵי

את הפירוק המתאים ל A .