25/07/18

מועד ב' – מבוא לאנליזה 2 למורים

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את:

א. $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx$

דרגת המונה קטנה ממש מדרגת המכנה, לכן ישר נעבור לפירוק לשברים חלקיים.

המכנה כבר מפורק לגורמים אי פריקים.

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-1) = 1$$

נציב $x=1$ ונקבל $5A = 1$

נציב $x=0$ ונקבל $\frac{2}{5} - C = 1$

נשווה את המקדמים של x^2 ונקבל כי $\frac{1}{5} + B = 0$

ביחד קיבלנו כי

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+3}{x^2+2x+2}\right]$$

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \ln\ |x-1|$$

כעת

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2+2x+2}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\ln\ (x^2+2x+2)$$

$$2\int \frac{1}{x^2+2x+2} = 2\int \frac{1}{(x+1)^2+1} = 2\arctan(x+1)$$

במבחן תהא נוסחא

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

תשובה סופית:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{5}\int \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+3}{x^2+2x+2}\right]dx = \frac{\ln|x-1|}{5} - \frac{1}{10}\ln(x^2+2x+2) - \frac{2}{5}\arctan(x+1) + C$$

ב. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx$

נעשה הצבה

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}dx=\begin{Bmatrix} t=1+e^{x} \\ dt=e^{x}dx \end{Bmatrix}=\int \frac{t-1}{t}dt=\int \left(1-\frac{1}{t}\right)dt=t-\ln|t|+C=1+e^{x}-\ln|1+e^{x}|+C$$

.2

א. מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+\ln(x)}{x}$

<u>אנכית:</u>

הנקודות החשודות הן נק' אי רציפות ונק' קצה תחום ההגדרה

כך או כך במקרה זה, הנקודה החשודה היחידה היא $x=0$.

נחשב גבול בכל אחת מהנקודות החשודות.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+\ln(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}x+\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$$

לכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית (מימין)

<u>משופעות:</u>

בגלל שהפונקציה מוגדרת רק בחיוביים, אין אסימפטוטה משופעת משמאל, נחפש רק מימין.

נחשב שיפוע

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{\ln(x)}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}x+\frac{\ln(x)}{x}-x=0$$

סה"כ $y=x$ אסימפטוטה משופעת מימין.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

.3

א. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-2x}^{x}\sin\left(x^2\right)dt}{x^3}$

$$\left(\int_g^h f\right)' = \left(F(h)-F(g)\right)' = f\left(h(x)\right)\cdot h'(x) - f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-2x}^{x}\sin(t^2)\,dt}{x^3} = \frac{0}{0}, L'Hopital = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)\cdot 1-\sin(4x^2)\cdot(-2)}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(x^2)}{x^2}+\frac{2}{3}\cdot 4\cdot\frac{\sin(4x^2)}{4x^2} = \frac{1}{3}+\frac{8}{3} = 3$$

ב. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 xsin(x)dx$$

כעת צריך לחשב את האינטגרל

$$\int_0^1 xsin(x)dx = \begin{Bmatrix} f' = \sin(x) & g = x \\ f = -\cos(x) & g' = 1 \end{Bmatrix} = [-x\cos(x)]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)\,dx = [-x\,cos(x)+\sin(x)]_0^1$$
$$= -\cos(1)+\sin(1)$$

.4

א. קרבו את $\frac{\sqrt{e}}{e}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

$$\frac{\sqrt{e}}{e} = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

כיוון שגודל האיברים יורד לאפס, והסימנים מתחלפים מדובר בטור לייבניץ, ולכן נסכום את האיברים הראשונים עד ולא כולל הראשון שקטן מהשגיאה.

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2!}-\frac{1}{8\cdot 3!}+\frac{1}{16\cdot 4!}$$

ב. חשבו את הנגזרת $f^{(101)}(0)$ עבור הפונקציה $f(x)=xe^{2x}$.

נתחיל מהטור הידוע

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

$$xe^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{n+1}$$

המקדם של x^{101} לפי הנוסחא של מקדמי טיילור הוא $\frac{f^{(101)}(0)}{101!}$

מצד שני, מצאנו את טור הטיילור, והמקדם של x^{101} הוא $\frac{2^{100}}{100!}$

ולכן

$$\frac{f^{(101)}(0)}{101!} = \frac{2^{100}}{100!}$$

וסה"כ

$$f^{(101)}(0) = 101 \cdot 2^{100}$$

5. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה המקיימת $f(x) \geq 0$ וגם $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

א. מצאו דוגמה ל f כזו המקיימת $f(0)=f(1)=0$.

ראשית ניקח פרבולה בוכה שחותכת בנקודות 0,1

$$f(x) = -x(x-1)$$

פונקציה זו אכן חותכת את הציר בנקודות הנתונות וחיובית בין לבין.

נחשב את האינטגרל

$$\int_0^1 (-x^2+x)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

לכן

$$\int_0^1 6(-x^2+x)dx = 1$$

הכפל ב6, לא שינה את נקודות החיתוך עם הציר. ואם רוצים חיוביות בכל הממשיים, ניתן לקחת את $6|x(x-1)|$

ב. מצאו דוגמה ל f כזו המקיימת $f(1)=100$.

$$\int_0^1 ae^{bx}dx = \left[\frac{a}{b}e^{bx}\right]_0^1 = \frac{a}{b}e^b - \frac{a}{b} = \frac{a}{b}\left(e^b - 1\right) = 1$$

לכן

$$a = \frac{b}{e^b - 1}$$

כלומר

$$f(x) = \frac{b}{e^b - 1}e^{bx}$$

כמו כן רוצים שיתקיים $f(1) = 100$ כלומר

$$100 = \frac{be^b}{e^b - 1}$$

משוואה זו מבאסת ממש.

ננסה פונקציה אחרת.

$$\int_0^1 ax^n dx = \left[\frac{ax^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{a}{n+1} = 1$$

לכן הפונקציה היא

$$f(x) = (n+1)x^n$$

רוצים ש$f(1) = 100$ ולכן הפונקציה הינה

$$f(x) = 100x^{99}$$

טורי חזקות ידועים: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\qquad$ $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad$ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$