88-113, תרגיל 6-פתרון:

1) רכיבים שלא נרשמו הם אפס

א.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix}$$

ג.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

ד.

$$\text{או}\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix} \quad \text{או}\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix} \quad \text{או}\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

(2

$$f_A(x) = (x-a)^3 \qquad f_A(x) = (x-a)^2(x-b) \qquad f_A(x) = (x-a)(x-b)(a-c)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$M_A(x) = (x-a)^3 \qquad M_A(x) = (x-a)^2(x-b) \qquad M_A(x) = (x-a)(x-b)(a-c)$$

$$\text{או}\quad M_A(x) = (x-a)^2 \qquad \text{או}\quad M_A(x) = (x-a)\ \ (x-b) \qquad \Downarrow$$

$$\text{או}\quad M_A(x) = (x-a) \qquad \Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

בהתאמה בהתאמה

(3

$$f_A(x) = (x-a)^4 = f_B(x)$$

$$M_A(x) = (x-a)^2 = M_B(x)$$

ר"ג של a ב-A הוא 2

ר"ג של a ב-B הוא 3

כלומר: $J_A = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}, \qquad J_B = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & a \end{pmatrix}$

4)

$$\longrightarrow$$

$$rank(J-\lambda I)=7, \qquad rank(J-\lambda I)^2=2, \qquad rank(J-\lambda I)^3=0$$

$\Downarrow$

על האלכסון מעל הראשי אין אחדים

$\Downarrow$

שני האחדים ב- $(J-\lambda I)^2$ הם

בשני בלוקים שונים

(כדי שכשנעלה חזקה הם יתאפסו)

$\Downarrow$

על האלכסון מעל הראשי 2 אחדים

כי זה בדיוק הר"ג של λ

$\Downarrow$

על האלכסון מעל הראשי 7 אחדים

ו- $\dim(\ker(J-\lambda I))=7$

$\Downarrow$

7 בלוקים

לכן, יש לכל היותר שני אחדים מעל האלכסון
בשני בלוקים ב- $J-\lambda I$ (כדי שכשנעלה חזקה ישארו אחד+אחד),
כלומר הבלוק המקסימלי הוא מגודל 3, ויש בדיוק שניים
כאלה (כדי ליצור את שני הבלוקים ב- $(J-\lambda I)^2$).
אבל יש שבעה בלוקים, ושבעה אחדים מעל האלכסון ולכן:
3+3+2+2+2+1+1=14

$$J=\begin{pmatrix} J_3(\lambda) & & & & & & \\ & J_3(\lambda) & & & & & \\ & & J_2(\lambda) & & & & \\ & & & J_2(\lambda) & & & \\ & & & & J_2(\lambda) & & \\ & & & & & J_1(\lambda) & \\ & & & & & & J_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

5) D: ראינו כי מטריצה זו, בשל שוויון הפ"א של מטריצות דומות, תהיה האלכסונית עם הע"ע, כולל ריבויים, באלכסונה.
T: כשנבצע את האלגוריתם לשילוש למעשה שלב מציאת הו"ע כבר יספק לנו את כל הבסיס ולא נצטרך להשלימו. מאותה סיבה כמו קודם באלכסונה של T יהיו ע"ע של המטריצה. בנוסף, בשל הבסיס שכולו מורכב מו"ע, המטריצה המשלשת תאפס גם את הרכיבים שמעל האלכסון.
כלומר T=D
J: ראינו שלמטריצה לכסינה פ"מ מל"ל שונים, לכן גודל כל בלוק הוא 1X1, ולכן J היא צורת ג'ורדן עם בלוקים 1X1 באלכסונה, כלומר אלכסונית, וממילא אלכסון זה יהיה של הע"ע.
אז J=T=D