# תרגיל בית 6 מבוא לחוגים ומודולים
# 88-212 סמסטר ב' תשע"ח

**שאלה 1.** עבור האידאלים הבאים קבעו האם הם ראשוניים והאם הם מקסימליים.

א. $I = \langle 4x+1 \rangle \lhd \mathbb{Z}[x]$.

ב. $I = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{Q}\} \lhd \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = R$. רמז: הראו $R \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle$.

ג. $I = \left\langle \overline{x+1} \right\rangle \lhd \mathbb{F}_3[x]/\left\langle x^4 - 16 \right\rangle$ כאשר בסימון $\overline{x+1}$ הכוונה לתמונה של $x+1$ בהטלה לחוג המנה. רמז: אפשר להשתמש במשפט השאריות הסיני.

**שאלה 2.** חוג $R$ נקרא ראשוני למחצה אם אין לו אידאלים $0 \neq I \lhd R$ כך ש-$I^2 = 0$. אידאל $P$ בחוג כלשהו $R$ נקרא ראשוני למחצה אם $R/P$ הוא חוג ראשוני למחצה.

א. הוכח כי כל אידאל ראשוני הוא אידאל ראשוני למחצה.

ב. הוכח כי $P$ ראשוני למחצה אם ורק אם (לכל אידאל $I \lhd R$, אם $I^2 \subseteq P$, אז $I \subseteq P$).

ג. אידאל $I \lhd R$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$I^k = 0$. הוכיחו כי חוג הוא ראשוני למחצה אם ורק אם אין בו אידאלים נילפוטנטיים שונים מ-0.

ד. מצאו את כל האידאלים הראשוניים למחצה של $\mathbb{Z}$.

**שאלה 3.** תנו דוגמה לתחום אוקלידי $R$ עם פונקציה אוקלידית $d$ ואיברים $a, b$ המקיימים $d(a) = d(b)$, אבל $\langle a \rangle \neq \langle b \rangle$.

**שאלה 4.** חשבו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את מחלק משותף מקסימלי $(f(x), g(x))$ של זוגות האיברים הבאים. אפשר לבחור שהוא יהיה פולינום מתוקן.

א. $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$ בחוג $\mathbb{Q}[x]$.

ב. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $g(x) = x^2 - 1$ בחוג $\mathbb{F}_5[x]$.

**שאלה 5.** יהי $R$ תחום שלמות, ותהי פונקציה $d : R \to \mathbb{N} \cup \{0, -\infty\}$ המקיימת $d(0) < d(x)$ לכל $x \neq 0$.

נניח שהיא מקיימת את התנאי הראשון שראינו בכיתה לאוקלדיות: לכל $a$ ולכל $b \neq 0$ קיימים $q, r \in R$ כך ש-$a = qb + r$ וגם $d(r) < d(b)$.

הפונקציה לא בהכרח מקיימת את התנאי השני: אם $a|b$, אז $d(a) \leq d(b)$. הוכיחו שבמקרה זה $R$ הוא עדין תחום אוקלידי. הדרכה: הראו שהפונקציה

$$\delta(a) = \min\{d(ax) \mid 0 \neq x \in R\}$$

היא פונקציה אוקלידית. במילים: $\delta(a)$ שווה לערך המינימלי של $d$ מבין האיברים שאינם אפס באידאל $\langle a \rangle$.

**שאלה 6.** רשות: יהי $R$ חוג חילופי. הוכיחו שבקבוצה $\mathcal{P}$ של כל האידאלים הראשוניים של $R$ קיים $I \in \mathcal{P}$ שהוא מינימלי ביחס להכלה.

רמז שהוא הדרכה: הראו שחיתוך כל שרשרת מ-$\mathcal{P}$ הוא אידאל ראשוני, והלמה של צורן.

בהצלחה!