# תרגיל בית 6 במבנים אלגבריים
# 89-214 סמסטר א' תשפ"ג

**שאלה 1** (חימום)**.** תארו את כל המחלקות השמאליות ב-$\mathbb{Z}_{60}/\langle 3\rangle$.

**שאלה 2.** תהי $G$ חבורה מסדר $n$ ויהי $\Phi\colon G\to S_n$ שיכון קיילי. הוכיחו שאיבר $g\in G$ הוא מסדר $m$ אם ורק אם $\Phi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים מאורך $m$.

**שאלה 3.** מצאו את האינדקסים הבאים.

א. $[5\mathbb{Z}:20\mathbb{Z}]$

ב. $[\mathbb{Z}_{60}\times\mathbb{Z}_{60}:\langle(3,3)\rangle]$ רמז: משפט לגראנז' הוא שימושי.

ג. $[\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:\langle(3,3)\rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

ד. $[S_4\times S_3\times\mathbb{Z}_{12}:\langle(1432)\rangle\times A_3\times\langle 9\rangle]$ רמז: משפט לגראנז' הוא שימושי.

**שאלה 4.** נסמן שני איברים של החבורה $GL_2(\mathbb{Q})$:

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

ונסמן ב-$H$ את תת־החבורה הקטנה ביותר של $GL_2(\mathbb{Q})$ שמכילה את $M,N$.

א. ידוע כי הסדר של $H$ הוא 8. מצאו את כל איברי $H$.

ב. מצאו שיכון מפורש של $H$ ל-$S_8$. כלומר חשבו והוכיחו לאן עובר כל איבר בשיכון שמצאתם. (הערה: יש שיכון של $H$ אפילו לתוך $S_4$, אבל לא חייבים למצוא אותו).

**שאלה 5.** רמז: הביטו במחלקות.

א. תהי $G$ חבורה מסדר 600, ותהי $H\le G$ תת־חבורה מסדר 300. הוכיחו כי לכל $a\in G$ מתקיים כי $a^2\in H$.

ב. נתבונן בחבורה $G=S_3\times\mathbb{Z}_{100}$ שהיא מסדר 600. מצאו תת־חבורה $H\le G$ מסדר 200 ואיבר $a\in G$ עבורו לא מתקיים $a^3\in H$.

**שאלה 6.** הוכיחו כי לכל $a,n,m\in\mathbb{Z}$ מתקיים $(an,am)=|a|\,(n,m)$.

**שאלה 7.** מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את ה-$\gcd$ של המספרים הבאים:

א. $(890,214)$

ב. $(5340,-1284)$, רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

**שאלה 8.** תהי $G$ חבורה ציקלית מסדר $n$ ויהי $g \in G$. מצאו נוסחה עבור $o(g)$. מה התנאי לכך ש-$g$ יוצר את כל $G$?

**שאלה 9.** בחרו שפת תכנות כרצונכם וכתבו פונקציה בשם xgcd המממשת את אלגוריתם אוקלידס המורחב. כלומר כתבו פונקציה המקבלת כקלט שני מספרים שלמים $a, b$ ומחזירה שלשה של מספרים $(d, s, t)$ כך שמתקיים $d = (a, b) = sa + tb$.

הוסיפו את התוצאות של הרצת

$$\texttt{xgcd}(5782, 2022) \qquad \texttt{xgcd}(654321, 123456) \qquad \texttt{xgcd}(314159, -161803)$$

הערה: בעוד ש-$d$ הוא יחודי, המקדמים $s, t$ הם לא בהכרח יחודיים. לדוגמה $\texttt{xgcd}(24, 44)$ תוכל להחזיר את השלשה $(4, 2, -1)$ כי $4 = 2 \cdot 24 - 1 \cdot 44$ אבל גם $(4, 13, -7)$ זו תוצאה מותרת, ולכן יתכנו מימושים נכונים שונים. דוגמאות נוספות

$$\texttt{xgcd}(-5, 0) \longrightarrow (5, -1, 0) \qquad\qquad \texttt{xgcd}(100, 11) \longrightarrow (1, 1, -9)$$

בהצלחה!