מתמטיקה בדידה – תרגיל 12

שאלה 1

הוכיחו בעזרת הלמה של צורן את עיקרון המקסימום של האוסדורף: תהי $(X,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. אזי כל שרשרת ב-$(X,\le)$ מוכלת בשרשרת מקסימלית.

[תזכורת: שרשרת ב-$(X,\le)$ היא תת קבוצה $Y \subseteq X$ כך שלכל $a,b \in Y$ מתקיים $a \le b$ או $b \le a$. שרשרת נקראת מקסימלית אם היא לא מוכלת באף שרשרת למעט עצמה.]

שאלה 2

יהי $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$. תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא ϵ-דלילה אם לכל $a,b \in A$ מתקיים $|a-b| \ge \epsilon$.

א. הוכיחו כי כל קבוצה ϵ-דלילה A מוכלת בקבוצה ϵ-דלילה מקסימלית ביחס להכלה. *[הדרכה: תהי X קבוצת כל תתי הקבוצות ה-ϵ-דלילות של $\mathbb{R}$ המכילות את A. אזי $(X,\subseteq)$ היא קבוצה סדורה חלקית. השתמשו בלמה של צורך כדי להראות כי קיים בה איבר מקסימלי.]*

ב. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה ϵ-דלילה <u>מקסימלית</u> ביחס להכלה. הוכיחו כי לכל $b \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש-$|a-b| < \epsilon$.

ג. הראו כי כל קבוצה ϵ-דלילה היא בת מנייה. (הערה: הסעיף הזה לא קשור ללמה של צורן.)

שאלה 3

יהיו V,W שני מרחבים וקטוריים מעל שדה F . הוכיחו ללא שימוש במשפטים על בסיסים: קיימת העתקה לינארית חח"ע $T: V \to W$ או שקיימת העתקה לינארית חח"ע $S: W \to V$.

[הדרכה: התבוננו בקבוצת הזוגות (V_0,T) כך ש-V_0 תת מרחב של V ו-$T: V_0 \to W$ העתקה לינארית חח"ע. נגדיר יחס סדר על קבוצה זו ע"י $(V_0,T) \le (V_0',T')$ אם"ם $V_0 \subseteq V_0'$ וגם $T'|_{V_0} = T$. השתמשו בלמה של צורן להראות כי קיים זוג (V_0,T) מקסימלי. אז הוכיחו כי מהמקסימילות נובע כי $V_0 = V$ או ש-T היא על.]

שאלה 4

תהי A קבוצה אינסופית. הוכיחו כי קיים יחס שקילות על A בו כל מחלקות השקילות הן בנות שני איברים בדיוק.

שאלה 5

תהי X קבוצה לא ריקה. הוכיחו כי קיים יחס סדר מלא על X.

[הדרכה: תהי L קבוצת הזוגות (A,R) כך ש-$A \subseteq X$ ו-R יחס סדר מלא על A. נגדיר יחס סדר חלקי על L על ידי $(A,R) \le (A',R')$ אם $A \subseteq A'$ וגם $R \subseteq R'$. אזי $(L,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. הראו בעזרת הלמה של צורן כי קיים איבר מקסימלי (A,R) ב-L . הראו כי המקסימליות של (A,R) גוררת ש-$X = A$.]

שאלה 6

קבוצה סדורה לינארית $(X,\leq)$ נקראת סדורה היטב אם לכל $X \subseteq Y \neq \phi$ קיים ב-Y איבר קטן ביותר (ביחס ל-$\leq$). עקרון הסדר הטוב קובע כי לכל קבוצה X קיים יחס סדר מלא $\leq$ על X כך ש-$(X,\leq)$ סדורה היטב.

הוכיחו את אקסיומת הבחירה בעזרת עיקרון הסדר הטוב.

[הדרכה: יהי $\{Y_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות. נגדיר $X = \cup_{i\in I} Y_i$. השתמשו בעיקרון הסדר הטוב כדי לקבל יחס סדר מלא $\leq$ על X כך ש-$(X,\leq)$ סדור היטב. העזרו בתכונות של $\leq$ כדי לבנות פונקציה $f: I \to X$ כך ש-$f(i) \in Y_i$ לכל $i \in I$.]*

**ללא שימוש באקסיומת הבחירה!*