

בוחר מתמטיקה בדידה, חורף תשעח

26.12.2017

מתרגל: אחיה בר-און.

- כתבו בדף הראשון את שמכם והת.ז. שלכם בצורה ברורה.
 - הקפידו על סדר ניקיון.
 - משך הבוחן: שעה וחצי.
 - ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
 - נמקו כל תשובה.
 - בבוחן 4 שאלות. כל אחת שווה 30 נקודות.
 - השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.
- המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות עליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

1. (30 נק') נגדיר קשר \diamond עבור תחשיב הפסוקים ע"י טבלת האמת הבאה:

A	B	$A \diamond B$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

הגשימו את אחד הקשרים \vee, \rightarrow באמצעות הקשר \diamond .
פתרון : נסתכל על טבלת אמת הבאה,

A	B	$A \diamond B$	$A \diamond (A \diamond B)$	$B \diamond A$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

רואים כי $A \vee B \equiv A \diamond (A \diamond B)$ ו $A \rightarrow B \equiv B \diamond A$

המשך תשובה לשאלה 1

2. (30 נק') הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים כי 5 מחלק את המספר $2^{3n} - 3^n$ (ללא שארית). כלומר, לכל n טבעי מתקיים כי $\frac{2^{3n} - 3^n}{5}$ מספר שלם.

פתרון : בסיס האינדוקציה $n = 0$: אכן מתקיים כי 5 מחלק את $2^{3 \cdot 0} - 3^0 = 0$.

צעד האינדוקציה: נניח נכונות הטענה עבור n מסוים. נוכיח כי הטענה עבור $n + 1$ נחשב

$$2^{3(n+1)} - 3^{n+1} = 2^{3n+3} - 3^{n+1} = 8 \cdot 2^{3n} - 3 \cdot 3^n = 5 \cdot 2^{3n} + 3 \cdot 2^{3n} - 3 \cdot 3^n = 5 \cdot 2^{3n} + 3 \cdot (2^{3n} - 3^n)$$

ולכן

$$\frac{2^{3(n+1)} - 3^{n+1}}{5} = \frac{5 \cdot 2^{3n} + 3 \cdot (2^{3n} - 3^n)}{5} = 2^{3n} + 3 \cdot \frac{(2^{3n} - 3^n)}{5}$$

שהינו מספר שלם כי לפי הנחת האינדוקציה $\frac{(2^{3n} - 3^n)}{5}$ מספר שלם.

המשך תשובה לשאלה 2

3. (30 נק') תהא (A, \leq) קבוצה סדורה חלקית ונתון כי קיים x איבר גדול ביותר ב (A, \leq) . נסמן $R = \leq^{-1}$ את היחס ההפוך של \leq .

הוכיחו כי קיים איבר מינימאלי יחיד ב (A, R) (שימו לב שצריך להוכיח שני דברים - להוכיח כי קיים איבר מינימאלי ב (A, R) ולהוכיח שהוא יחיד).

פתרון: נוכיח כי x איבר מינימאלי ב (A, R) . אכן נניח שעבור $y \in A$ מתקיים yRx ונראה כי $x = y$. אכן אם yRx אזי $x \leq y$ כיוון ש x איבר גדול ביותר ב (A, \leq) מתקיים גם $y \leq x$. כיוון ש \leq יחס סדר ובפרט אנטי סימטרי נקבל כי $x = y$.

נוכיח כי x הוא מינימאלי יחיד ב (A, R) . אכן נניח כי x' מינימאלי ב (A, R) ונראה כי $x = x'$. כיוון ש x איבר גדול ביותר ב (A, \leq) מתקיים גם $x' \leq x$ ולכן xRx' כיוון ש x' מינימאלי ב (A, R) נקבל כי $x = x'$.

המשך תשובה לשאלה 3

4. תהא $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$ ותהא $A = P(X)$ (כלומר A קבוצת החזקה של X).
תהא $B = \{2, 5, 9, 10\}$ נגדיר יחס R על A כדלקמן

$$R = \{(a, a') \in A \times A \mid B \subseteq (a \cap a')\} \cup I_A$$

כאשר $I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ הוא יחס הזהות על A .

(א) (15 נק') הוכיחו כי יחס שקילות על A .

פתרון: נסמן $S = \{(a, a') \in A \times A \mid B \subseteq (a \cap a')\}$ ואז $R = S \cup I_A$.

רפלקסיביות: לכל $a \in A$ מתקיים כי $(a, a) \in I_A \subseteq R$ ולכן $(a, a) \in R$.

סימטריות: נניח $(a, a') \in R$ צ"ל $(a', a) \in R$. אכן, אם $a = a'$ סיימנו. אחרת $(a, a') \in S$ ואז

$$B \subseteq (a \cap a') \text{ ולכן } B \subseteq (a' \cap a) \text{ ולכן } (a', a) \in S \subseteq R$$

טרנזיטיביות: נניח $(a, a') \in R$, $(a', a'') \in R$. אם $a = a'$ או $a' = a''$ סיימנו. אחרת,

$$(a, a') \in S \text{ ואז } B \subseteq (a \cap a') \text{ וגם } B \subseteq (a' \cap a'') \text{ ואז}$$

$$B \subseteq (a \cap a') \cap (a' \cap a'') \subseteq (a \cap a'')$$

שזה גורר $(a, a'') \in S \subseteq R$.

(ב) (15 נק') כמה איברים יש בקבוצת המנה A/R ? נמקו תשובתכם.

פתרון: נשים לב כי aRa' אם $a = a'$ או B מוכל ב $a \cap a'$ אם $a = a'$ או B מוכל ב a, a' .

לכן עבור $a \in A$ מתקיים כי:

i. אם $B \subseteq a$ אז aRa (כי $B \subseteq (a \cap a)$) ולכן מחלקת השקילות של a היא $[a] = \{a\}$

ii. אם $B \not\subseteq a$ אזי מחלקת השקילות של a היא $[a] = \{a\}$

לכן

$$A/R = \{[a] : a \in A\} = \{[B]\} \cup \{[a] : B \not\subseteq a \in A\}$$

כלומר מספר האיברים ב A/R שווה למספר האיברים ב $\{a \in A : B \not\subseteq a\}$ ועוד אחד. מתקיים כי

$$\{a \in A : B \not\subseteq a\} = A \setminus \{a \in A : B \subseteq a\}$$

איבר a שמכיל את B הוא מהצורה $a = B \cup C$ עבור $C \subseteq X \setminus B$ ולכן

$$|\{a \in A : B \subseteq a\}| = |P(X \setminus B)| = 2^{|X \setminus B|} = 2^6$$

כאשר הסימון $|Y|$ פירושו מספר האיברים ב Y . כעת, מספר האיברים בקבוצה $\{a \in A : B \not\subseteq a\}$ שווה

ל

$$|A| - |\{a \in A : B \subseteq a\}| = |P(X)| - 2^6 = 2^{10} - 2^6$$

לכן התשובה הסופית היא $1024 - 63 = 961$ היא $|A/R| = 1 + 2^{10} - 2^6 = 1024 - 63 = 961$.

המשך תשובה לשאלה 4

