# תרגול כיתה 1 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מרכז ופיזור

*מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן*

שאלה 1

א) סווג את המשתנים הבאים לבדידים/רציפים:

(1). גובה מעל פני הים. (2). צבע עיניים. (3). קצב המכוניות שנכנסות לחניון בשעה.

ב). סווג את המשתנים הבאים לפי סולמות מדידה (שמי/סדר/מרווחי/יחס)

(1). דרגה צבאית. (2). ציון במבחן כלשהו. (3). כמות דלק במיכל. (4). התשובות הבאות בשאלון טעימת גלידה חדשה: 1=אוהב; 2=אדיש; 3=לא אוהב.

שאלה 2

לפניכם נתונים על שנות וותק בעבודה של 12 עובדים:

6, 7, 5, 8, 5, 6, 7, 7, 8, 6, 4, 6

א). חשב את המדדים המרכזיים של סדרת הנתונים: מינימום, מקסימום, ממוצע, חציון.
ב). חשב את מדדי הפיזור של הסדרה: טווח, שונות, סטיית תקן מדגמית, טווח בין-רבעוני.
ג). התברר כי חלה טעות ברישום הוותק לעובד בעל 4 שנות וותק, והוותק שלו הוא 5 שנים. הסבירו איכותית, כיצד ישפיע התיקון על כל אחד מהמדדים: השכיח, החציון והממוצע.

**נוסחאות המדדים:**

**א).** המדדים המרכזיים:

**מינימום:** התצפית הקטנה ביותר $X_{\min}$ **.**

**מקסימום:** התצפית הגדולה ביותר $X_{\max}$ **.**

**ממוצע** (Mean): הנוסחה- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$

**שכיח** (Mo-Mode): אותו ערך המופיע בשכיחות הגבוהה ביותר. ייתכנו מספר שכיחים.

**אמצע הטווח** (MR): $\frac{1}{2}\left(X_{\min} + X_{\max}\right)$

**חציון** (Me/Md-Median): כאשר נתונה רשימת תצפיות מסודרת –

אם מספר התצפיות אי-זוגי - זהו ערך התצפית המרכזית שמיקומה: $X_{(N+1)/2}$ .

אם מספרן זוגי – זוהי התצפית שמיקומה: $\frac{1}{2}\left[X_{(N/2)} + X_{(N/2+1)}\right]$.

**ב).** מדדים לפיזור הנתונים:

**טווח - Range :** $X_{\max} - X_{\min}$

**שונות המדגם (sample variance):**

אפשר להשתמש באחת משתי הנוסחאות-

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

**סטיית התקן המדגמית (sd)** – היא שורש השונות. $sd=\sqrt{s^2}$

**טווח בין רבעוני – (Inter-Quantile Range):** $\mathrm{IQR}=Q_3-Q_1$ – מחושב ע"י השלבים הבאים

למציאת אחוזונים $Q_i$ (נשתמש בנוסחאות האמפיריות הבאות) -

**<u>אחוזונים (שברונים, ערכי חלוקה) - Quantiles:</u>**

האחוזון ה- p הנו הערך $x_p$ אשר $p$% מהתצפיות קטנות או שוות ממנו

ו- $(100-p)$% מהתצפיות גדולות או שוות ממנו.

דוגמאות לאחוזונים:

א. חציון = median = האחוזון ה- 50. נסמנו $Q_2$ או $x_{0.50}$.

ב. רבעון תחתון = האחוזון ה- 25. נסמנו $Q_1$ או $x_{0.25}$.

ג. רבעון עליון = האחוזון ה- 75. נסמנו $Q_3$ או $x_{0.75}$.

**שלבי חישוב האחוזון p** (נתונים בדידים)**:**

1) מיין את התצפיות מהקטנה לגדולה.

2) יהי $0<p<100$ האחוזון המבוקש, אזי חשב $Q=np/100$.

3) אם מתקבל מספר שלם, אזי האחוזון המבוקש: $\left(X_{(Q)}+X_{(Q+1)}\right)\Big/2$.

4) אם מתקבל שבר, אזי האחוזון המבוקש: $X_{(k)}\quad k=\lceil Q\rceil,$

($\lceil Q\rceil$ – פונקציית התקרה. לדוגמה: $\lceil 4.1\rceil=5$).

<u>שאלה 3</u>

במבחן סוף סמסטר התקבלו המדדים הבאים עבור הציונים:
ממוצע = 61, חציון = 65, שונות = 25, טווח = 80.
שני הבודקים הציעו לשנות את הציונים בדרכים הבאות:
בודק א' הציע לתת תוספת של 12 נק' לכל סטודנט.
בודק ב' הציע לחלק כל ציון ב-2 והוספת 50 נק' לתוצאה.
כיצב ישפיעו הצעות הבודקים על כ"א מהמדדים הנ"ל?

## קומבינטוריקה ומרחב הסתברות אחיד (סימטרי)

תמורה (פרמוטציה) – בחירה של סדרת איברים כך שהסדר חשוב.

- תמורה חלקית (חליפה)- מאוכלוסיה בגודל n בוחרים k עצמים כך שהסדר חשוב.
  מס' התמורות האפשריות הוא-

$$(n)_k = A_n^k = P_{(n,k)} := \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)....(n-(k-1))$$

- בתמורה מלאה, מונים בכמה דרכים ניתן לסדר קבוצה של n עצמים.
  (שקול לבחירת n איברים מתוך קבוצה בגודל n).
  $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$
  תמורה מלאה היא פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה על עצמה.

תמורות במעגל – מספר התמורות הוא !(n-1), שמכיוון שבמעגל אין נקודת התחלה.

צירוף (קומבינציה)- בחירת קבוצה חלקית של k מתוך n עצמים כך שהסדר אינו חשוב.
$C_n^k = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. כשיש חשיבות לסדר פשוט נחלק ב- !k.

מקדמים מולטינומיים – במקרה בו אנו רוצים לחלק $n$ עצמים שונים זה מזה ל r קבוצות בגדלים $n_1, n_2, ..., n_r$ כאשר $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ .

מס' החלוקות האפשרי הוא: $\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} := \frac{n!}{n_1!n_2!\cdot ... \cdot n_r!}$

### טבלת בחירת k עצמים מתוך n עצמים

| | ללא החזרה | עם החזרה |
|---|---|---|
| **ללא חשיבות לסדר הבחירה** | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k!)\cdot(n-k)!}$<br>דוגמה:<br>בחירת ועד בגודל $k$ מכיתה בגודל $n$. | $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$<br>דוגמה:<br>$k$ פריטים מסודרים בשורה, וצריך למקם $n$-1 מחיצות בינהם. |
| **עם חשיבות לסדר הבחירה** | $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$<br>דוגמה:<br>בחירת רה"מ, שר-ביטחון ושר- חוץ מתוך כלל חברי הכנסת<br>.($n$=120, $k$=3) | $n^k$<br>דוגמאות:<br>1) יצירת מספר בין $k$ ספרות כשמותר להשתמש ב- $n$ ספרות.<br>2) חלוקת $k$ כדורים ל- $n$ תאים. |

מרחב הסתברות אחיד (סימטרי)

מאורע – תוצאה אפשרית של ניסוי.

מרחב הסתברות אחיד – מרחב שבו לכל אחד מהמאורעות האפשריים הסתברות שווה.

ההסתברות שמאורע A יתרחש היא: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

כאשר $\Omega$ – מרחב המדגם. $|\Omega|$ – גודל מרחב המדגם. $|A|$ – גודל קבוצת המאורע $A$.

שאלה 1

**במגירת גרביים: 7 גרביים שחורות, 8 כחולות, 9 ירוקות. הגרביים מפוזרות באקראי במגירה. 2 גרביים נבחרות באקראי:**

**א. מה ההסתברות שהן מאותו הצבע ?**

**ב. מה ההסתברות שנבחרה לפחות גרב אחת שחורה ?**

**ג. מה ההסתברות שנבחרה גרב שחורה וגרב כחולה ?**

שאלה 2

**4 כדורים מוכנסים אקראית ל-3 תאים. מה ההסתברות ש-**

**א. תא מס' 1 נותר ריק.**

**ב. רק תא מס' 1 נותר ריק.**

**ג. יש בדיוק תא ריק אחד (כלשהו).**

**ד. יש תא ריק (כלשהו).**

**ה. יש תא עם בדיוק 2 כדורים.**

שאלה 3

במכונית 4 נוסעים (כולל הנהג). מחלקים באקראי 11 בקבוקי שתייה זהים בין הנוסעים (שים לב שייתכן ונוסע לא מקבל כלל בקבוקי שתייה).

א. מה ההסתברות שכל נוסע יקבל לפחות בקבוק אחד?

ב. כל נוסע מטיל קוביית משחק הוגנת. מה ההסתברות שלפחות שני נוסעים יקבלו אותה תוצאה?

שאלה 4

קבוצה של 10 מטיילים צועדת בטור. 5 הראשונים חובשים כובעים אדומים, 2 אח"כ חובשים כובעים כחולים, ו- 3 האחרונים חובשים כובעים ירוקים.

א. לאחר שהתפזרו למנוחה קצרה, הקבוצה מסתדרת שוב לצעידה בצורה אקראית. מה ההסתברות שטור המטיילים ישוב לסדר צבע הכובעים כמוקדם?

ב. בערב יושבים כל המטיילים במעגל סביב מדורה בסדר אקראי. 7 לובשים סוודרים כחולים ו-3 ירוקים. מה ההסתברות שכל לובשי הסוודרים הירוקים יושבים זה לצד זה?