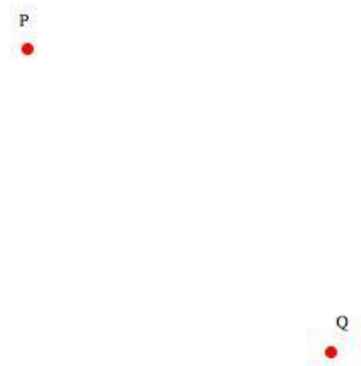
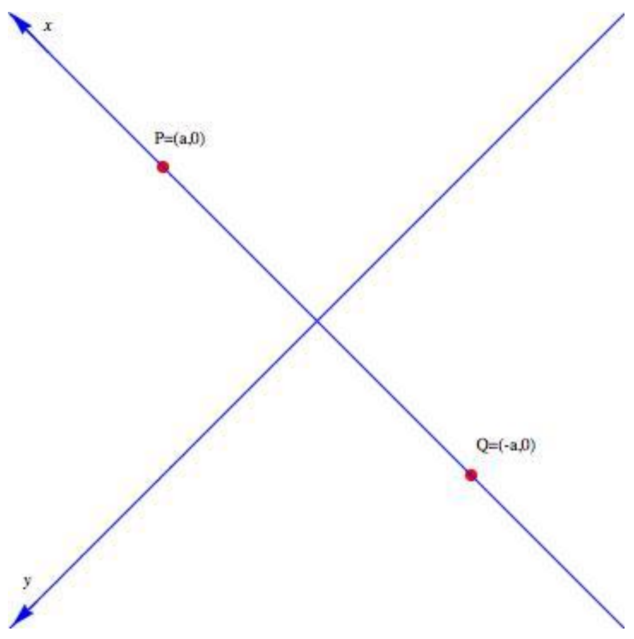
גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית – פתרון תרגיל 2

.1

א. אם $P=Q$ כל הנקודות במישור מקיימות את התנאי, ונניח מכאן כי $P\neq Q$.

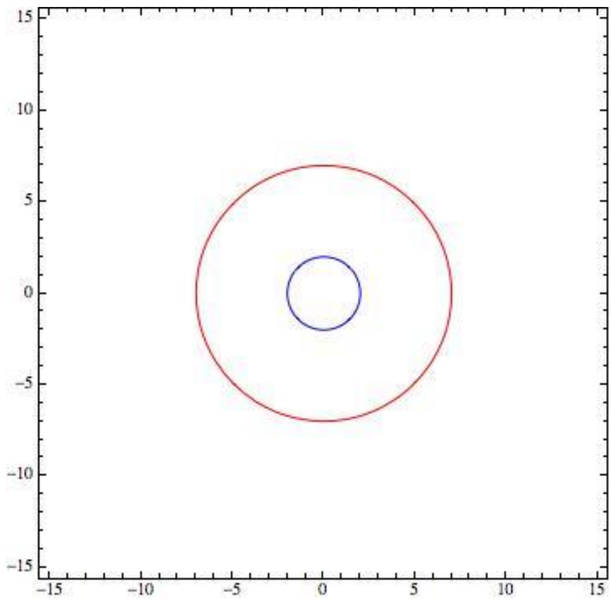
נגדיר מערכת צירים כנ"ל: הישר (היחידי!) העובר דרך שתי הנקודות יהיה ציר ה- x , וציר ה- y יהיה הישר המאונך לו, העובר דרך אמצע הקטע PQ . ע"י בניה זו לנקודות יש קואורדינטות מהצורה $P=(a,0),Q=(-a,0)$ עבור איזשהו $a\neq 0$ ממשי. התנאי שנקודה כללית $R=(x,y)$ צריכה לקיים כדי להיות באותו מרחק מ- P ומ- Q הוא $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$, כלומר $(x-a)^2+y^2=(x+a)^2+y^2$, כלומר $x^2-2ax+a^2=x^2+2ax+a^2$, כלומר $x=0$. לסיכום, התשובה היא ציר ה- y שלנו.(כלומר, זהו הישר החוצה את הקטע PQ ומאונך לו.)



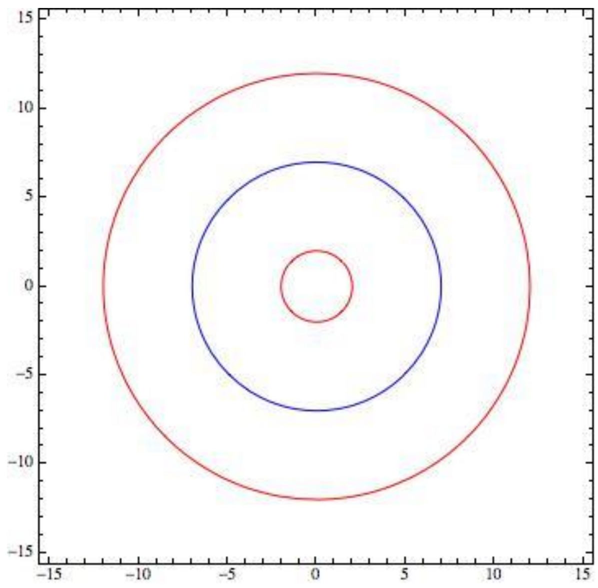


ב. התשובה היא המעגל שרדיוסו באורך 7 יחידות, ומרכזו כמרכז המעגל C. לצורך ההוכחה נבחר מערכת צירים כך שמרכז המעגל נמצא בראשית.

ריבוע המרחק בין נקודה כלשהי (x,y), לנקודה כללית על המעגל $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ הוא $d^2=\sqrt{(x-2\cos\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2}^2=(x-2\cos\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2$. נרשום את הנקודה (x,y) בצורה קוטבית $(x,y)=(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ ונקבל $d^2=R^2+4-4R\cos(\varphi-\theta)$. זה יהיה מינימלי או"א $\cos(\varphi-\theta)=1$, כלומר $\varphi=\theta$ (עד כדי $2\pi k$). במקרה זה, $d^2=R^2-4R+4$ ונרצה שזה יהיה 5^2. מקבלים רדיוס (חיובי) יחיד $R=7$. (הפתרון השלילי $R=-3$ נפסל כמובן)



ג. הפעם התשובה מורכבת משני מעגלים. לשניהם יש את המרכז של C, אבל לאחד רדיוס של 12 יחידות, ולשני רדיוס של 2 יחידות. החישוב זהה לשאלה הקודמת.

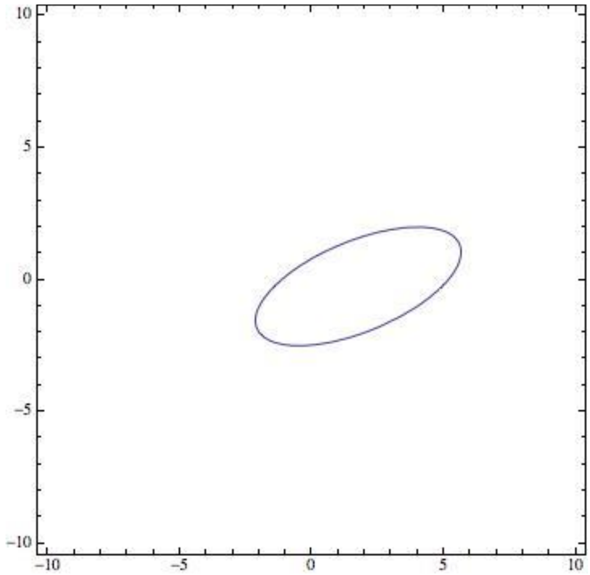


לשאלות 2,3 אין תשובה חד משמעית. ניתן להגיע לכמה וכמה צורות קנוניות שונות, וכאן אתן את התשובה שאני קיבלתי. **יש לוודא שסוג העקומה/משטח זהה.**

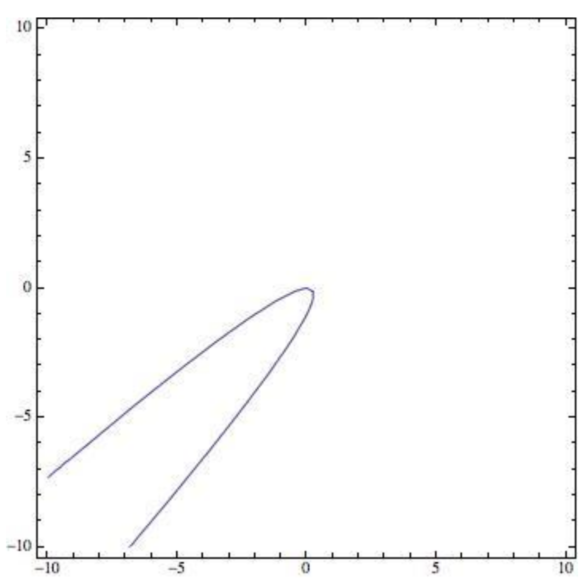
2.

א. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$. ע"ע $\lambda_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$. ו"ע (לא מנורמלים) $v_1=\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}$.

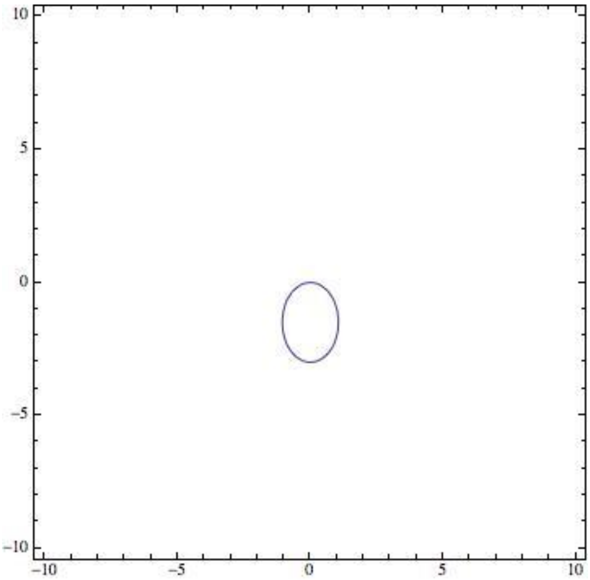
הצורה הקנונית שקיבלתי היא $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ עם $b^2=\frac{81}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}, a^2=\frac{81}{8\left(2+\sqrt{2}\right)}$. זוהי אליפסה.



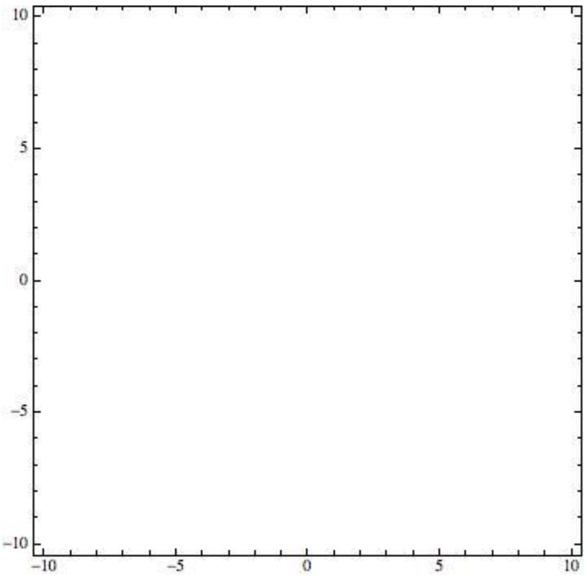
ב. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ ע"ע $\lambda_{1,2}=2,0$. ו"ע $v_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. הצורה הקנונית שקיבלתי היא $y=-2\sqrt{2}x^2$. זוהי פרבולה.



ג. $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ כבר אלכסונית... הצורה הקנונית שקיבלתי היא $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ עם $a^2=\frac{9}{8},b^2=\frac{9}{4}$. זוהי שוב אליפסה.



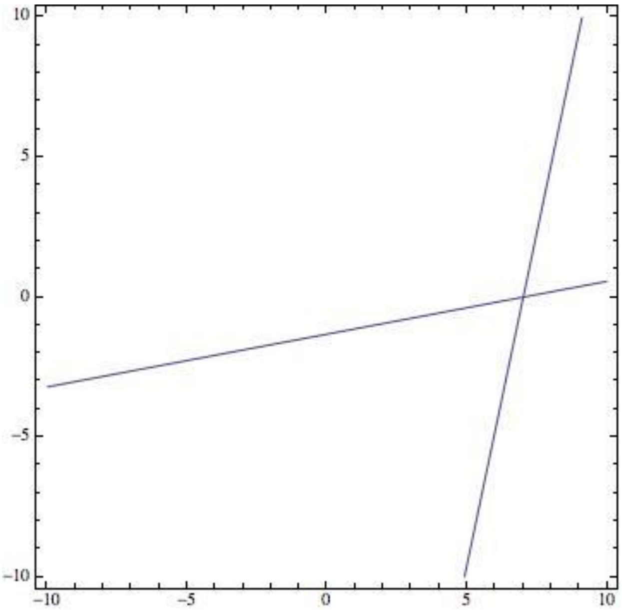
ד. $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}$. ע"ע $\lambda_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$ וו"ע $v_1=\begin{bmatrix}-1+\sqrt{2}\\1\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}-1-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$. הצורה הקנונית שקיבלתי היא $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ עם $a^2=\frac{47}{8\left(2+\sqrt{2}\right)},b^2=\frac{47}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}$. מקבלים גרף ריק, או "אליפסה דמיונית"



ה. $A=\begin{bmatrix} -\frac{11}{196} & \frac{5\sqrt{3}}{56} \\ \frac{5\sqrt{3}}{56} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$ ע"ע $\lambda_{1,2}=\frac{-93\pm 5\sqrt{2353}}{1568}$ וו"ע

$v_1=\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{2353}}{28\sqrt{3}} \\ 1 \end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{2353}}{28\sqrt{3}} \\ 1 \end{bmatrix}$. הצורה הקנונית שקיבלתי היא $y^2=(mx)^2$ עם

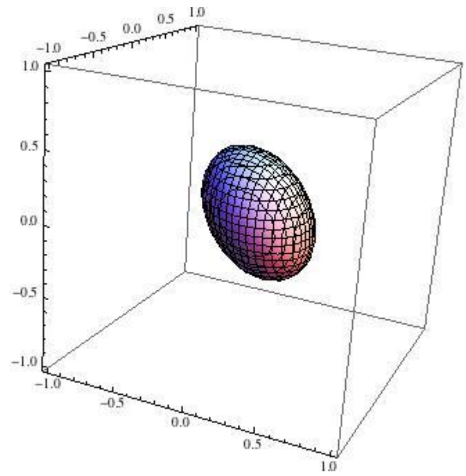
$m^2=\frac{33737+465\sqrt{2353}}{25088}$. אלו שני ישרים נחתכים.



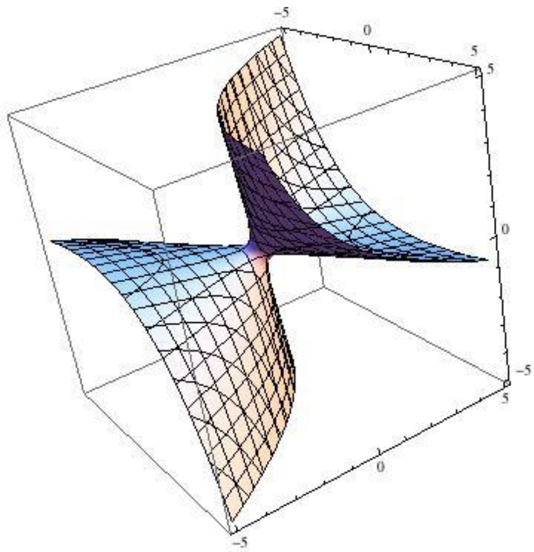
3. א. $A=\begin{bmatrix} 6 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 5 \end{bmatrix}$. ע"ע $\lambda_{1,2,3}=8,4,4$ וו"ע

$v_1=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ הצורה הקנונית שקיבלתי היא $8x^2+4y^2+4z^2=1$.

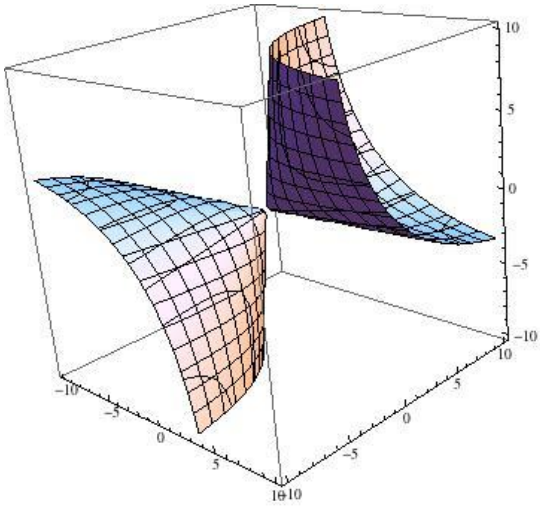
זהו אליפסואיד



ב. $A=\begin{bmatrix}3&-2&-4\\-2&-2&-6\\-4&-6&-1\end{bmatrix}$ ע"ע $\lambda_{1,2,3}=-9,6,3$ וו"ע $v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$ הצורה הקנונית שקיבלתי היא $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ עם $a^2=\frac{1}{9},b^2=\frac{1}{6},c^2=\frac{1}{3}$. זהו היפרבולואיד חד-יריעתי.



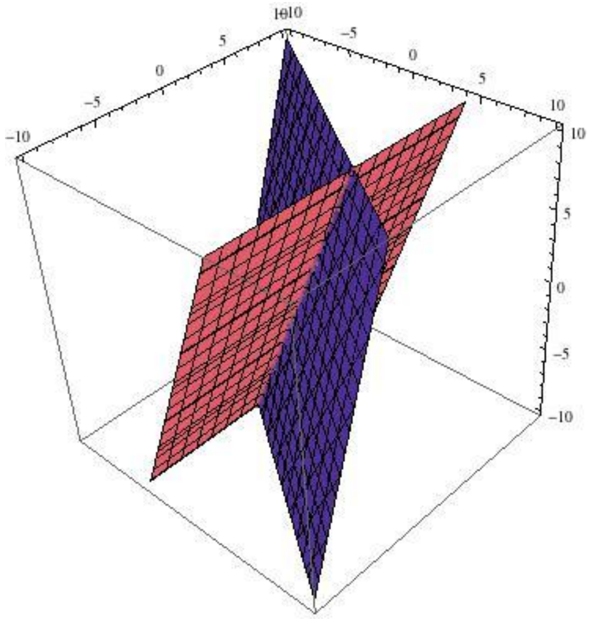
ג. $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ע"ע $\lambda_{1,2,3}=-\frac{5}{4},1,1$ וו"ע $v_3=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. הצורה הקנונית שקיבלתי היא $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ עם $a^2=\frac{4}{5}, b^2=c^2=1$. זהו חרוט (מעגלי)



ד. $A=\begin{bmatrix} 10 & \frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{15}{2} & 0 & -3 \\ -\frac{9}{2} & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ע"ע $\lambda_{1,2,3}=\frac{12\pm\sqrt{406}}{2},0$ וו"ע

$v_3=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} \\ 1 \end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix} \frac{-82-\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29+2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{bmatrix}, v_1=\begin{bmatrix} \frac{-82+\sqrt{406}}{27} \\ \frac{29-2\sqrt{406}}{9} \\ 1 \end{bmatrix}$. הצורה הקנונית שקיבלתי היא

$y^2=(mx)^2$ עם $m^2=\frac{275+12\sqrt{406}}{131}$. זה נראה כמו שני ישרים, אבל זה במרחב תלת ממדי. מדובר בשני מישורים נחתכים.



ה. $A=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$ ע"ע $\lambda_{1,2,3}=1,0,0$ וו"ע $v_1=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\1\\\frac{2}{5}\end{bmatrix}$. הצורה הקנונית שקיבלתי היא $x^2=y$. זהו גליל פרבולי.