הצבת אוילר

4 במאי 2017

כאן נלמד על שיטת הצבה הנקראת "הצבת אוילר" הטובה למציאת

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$$

כאשר R היא פונקציה רציונאלית של שני משתנים (x, ו־ $\sqrt{ax^2+bx+c}$). נחלק למקרים:

1. אם $a>0$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$ ונקבל

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{c-t^2}{2\sqrt{a}t-b}, dx=\frac{-2t(2\sqrt{a}t-b)-2\sqrt{a}(c-t^2)}{(2\sqrt{a}t-b)^2}dt=\frac{-2(\sqrt{a}t^2-bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t-b)^2}dt$$

כך נקבל פונקציה רציונאלית במשתנה t, נפתור אותה ונחזיר את x למקומו. לדוגמא:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-7x+6}}$$

נציב $\sqrt{x^2-7x+6}=x+t$, ונקבל $x=\frac{6-t^2}{2t+7}, dx=\frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2}dt$ ולכן

$$I=\int\frac{1}{\frac{6-t^2}{2t+7}\cdot(x+t)}\cdot\frac{-2(t^2+7t+6)}{(2t+7)^2}dt=\int-\frac{2(t^2+7t+6)}{\frac{6-t^2}{2t+7}\cdot(\frac{6-t^2}{2t+7}+t\frac{2t+7}{2t+7})\cdot(2t+7)^2}dt$$

$$= \int -\frac{2}{(6-t^2)}dt = -\frac{2}{6}\int \frac{1}{1-(\frac{t}{\sqrt{6}})^2}dt = \{u = \frac{t}{\sqrt{6}}, dt = \sqrt{6}du\}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2}(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u})\sqrt{6}du = -\frac{\sqrt{6}}{6}(\ln|1+u| - \ln|1-u|) + c$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{1+\frac{t}{\sqrt{6}}}{1-\frac{t}{\sqrt{6}}}\right| + c$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right| + c = -\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{x^2-7x+6}-x}{\sqrt{6}-\sqrt{x^2-7x+6}+x}\right| + c$$

2. אם $c > 0$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ ונקבל

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a-t^2}, dx = \frac{2\sqrt{c}(a-t^2) + 2t(2\sqrt{c}t - b)}{(a-t^2)^2}dt = \frac{2(\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a)}{(a-t^2)^2}dt$$

כך נקבל פונקציה רציונאלית במשתנה t, נפתור את האינטגרל ונחזיר את x למקומו. בדוגמא לעיל גם $c > 0$, אתם יכולים להציב שם את ההצבה הזו ולראות שיוצא אותו דבר.

3. אם $a < 0 \wedge c < 0$ נקבל שהפולינום שבתוך השורש פריק מעל הממשיים, כי אחרת $b^2 - 4ac < 0$, ואז ע"י החלפת משתנים נקבל

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-(-ax^2-bx-c)} = \sqrt{-[(\sqrt{-a}x - \frac{b}{2\sqrt{-a}})^2 + (-\frac{b^2}{-4a} - c)]}$$

וכיון ש $b^2 - 4ac < 0$ נובע $\frac{b^2}{-4a} + c < 0$ ולכן הביטוי $\left(-\frac{b^2}{-4a} - c\right)$ חיובי. לכן הביטוי $(\sqrt{-a}x - \frac{b}{2\sqrt{-a}})^2 + (-\frac{b^2}{-4a} - c)$ גם חיובי, ובסה"כ מה שנמצא בתוך השורש שלילי, והשורש לא קיים. לכן בהכרח הפולינום פריק. כלומר: $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. במקרה כזה נציב:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$$

ונקבל

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = ax^2 + bx + c = t^2(x-\alpha)^2$$

$$\Downarrow$$

$$a(x-\beta) = t^2(x-\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$x(a-t^2) = a\beta - \alpha t^2$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$$

ולכן נקבל אינטגרל של פונקציה רציונאלית. לדוגמא:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-4}}$$

$a, c < 0$ והפולינום בשורש פריק, $-x^2+5x-4 = -(x-4)(x-1)$, ולכן נציב

$$\sqrt{-x^2+5x-4} = t(x-4)$$

ולפי החישוב לעיל, לאחר הצבת $a=-1, \alpha=4, \beta=1$, נקבל

$$x = \frac{-1-4t^2}{-1-t^2} = \frac{1+4t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{8t(1+t^2)-2t(1+4t^2)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{6t}{(1+t^2)^2}dt$$

נותר לחשב:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{1}{t(\frac{1+4t^2}{1+t^2}-4)} \cdot \frac{6t}{(1+t^2)^2}dt = \int \frac{6t}{t(\frac{-3}{1+t^2})(1+t^2)^2}dt =$$

$$= -2\int \frac{1}{1+t^2}dt = -2\arctan(t) + c = -2\arctan\left(\frac{\sqrt{-x^2+5x-4}}{x-4}\right) + c$$

הערות:

- לגבי סעיפים $1,2$: אם $a>0 \wedge c>0$, אתם יכולים לבחור איזו הצבה שנוחה לכם.
- לגבי סעיף 3: ניתן להשתמש בהצבה זו בכל פולינום פריק (גם אם $a>0 \vee c>0$).

בהצלחה! 0>0