

פתרון 10 תרגיל

תרגיל 1.

פתרון: נמצא פ"א, ע"ע, מ"ע

$$f_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda+1) \left| \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (\lambda+1) \left| \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

מ"ע

$$V_2 = N\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{-1} = N\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

נפעיל גרם שמידט על כל מ"ע בנפרד:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

ננרמל כדי למצוא בסיס או"נ ל V_2

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ננרמל את v_3 לקבל בסיס או"נ ל V_{-1}

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ונגדיר

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

להיות מטריצה של ה"ע המנורמלים ואז

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 2.

פתרון. טענה: אם v_i הוא ו"ע של A השייך לע"ע λ_i , אז v_i הוא ו"ע של B השייך לע"ע

$$\lambda_i^2 - 6\lambda_i + 11$$

(תוכיחו בבית)

ל- A יש n ו"ע, כל ו"ע v_i מתאים לע"ע λ_i לפי הטענה v_i הוא ו"ע של B המתאים לע"ע

$$\lambda_i^2 - 6\lambda_i + 11$$

, בפרט ל B יש n ו"ע ולכן לכסינה. בנוסף, הע"ע של B הם

$$\lambda^2 - 6\lambda + 11$$

עבור λ ע"ע של A . כיון ש

$$\lambda^2 - 6\lambda + 11 \neq 0$$

לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ נקבל כי 0 אינו ע"ע של B ולכן B הפיכה.

תרגיל 3. א. הוכיחו: אם T, S מטריצות אונטריות אז גם ST מטריצה אונטרית.

$$(ST)^* = T^* S^* = T^{-1} S^{-1} = (ST)^{-1}$$

ב. הוכיחו: אם T, S מטריצות הרמטיות אז ST הרמטי אם ורק אם $ST = TS$.

$$(ST)^* = ST \Leftrightarrow T^* S^* = ST \Leftrightarrow TS = ST$$

תרגיל 4 פתרון

יהי $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ בסיס אורתונורמלי.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ i & 1+i & 0 \\ i & 1+i & 2+i \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_B^* = \begin{pmatrix} -i & -i & -i \\ 0 & 1-i & 1-i \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

$$T^*(z_1, z_2, z_3) = (-iz_1 - iz_2 - iz_3, (1-i)z_2 + (1-i)z_3, (2-i)z_3)$$

תרגיל 5 א.

פתרון: נבדוק שמתקיימות שלושת התכונות:

$$1. \langle \alpha A_1 + A_2, B \rangle = tr((\alpha A_1 + A_2) B^*) = \alpha tr(A_1 B^*) + tr(A_2 B^*) = \alpha \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$$

2. נציין ש $tr(A) = tr(A^t)$ מתקיים

$$\langle B, A \rangle = tr(BA^*) = tr(B\bar{A}^t) = tr(\bar{A}B^t) = \overline{\langle AB^t \rangle} = \overline{\langle A, B \rangle}$$

3.

$$\langle A, A \rangle = tr(AA^*) = \sum_{i=1}^m R_i(A) C_i(A^*) = \sum_{i=1}^m R_i(A) C_i(\bar{A}^t) = \sum_{i=1}^m R_i(A) \overline{R_i^t(A)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$$

קל לראות שוב, שיש שוויון אם ורק אם $a_{ij} = 0$ לכל i, j

ב.

ניקח את B להיות בסיס אורתונורמלי:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וודאו שאתם מבינים למה!
נמצא מטריצה מייצגת:

$$[T]_B^* = \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix}$$

כיון ש B בסיס אורתונורמלי מתקיים

$$[T^*]_B^* = [T]_B^* = \begin{pmatrix} i-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i+1 \end{pmatrix}$$

ולאחר חישוב נקבל ש

$$T^*(A) = A^t - iA$$

תרגיל 6

א. כפי שראינו בהגדרה $\langle v - \pi_U(v), u \rangle = 0$ ולכן $(v - \pi_U(v)) \in U^\perp$

נשתמש בליניאריות ברכיב הראשון ונעביר אגף על מנת לקבל $\langle v, u \rangle = \langle \pi_U(v), u \rangle$.

ב.

נמצא תחילה בסיס אורתוגונלי בעזרת תהליך גראם-שמידט

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\} \text{ הבסיס האורתוגונלי על פי תהליך גראם-שמידט הוא}$$

נחשב את ההיטל על פי ההגדרה $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ בסיס אורתוגונלי לתת המרחב W , אז ההיטל הינו

$$\pi_W(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

$$\pi_U(v) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{7}{26} \\ \frac{35}{178} \\ \frac{35}{35} \end{pmatrix}$$

כפי שיצא לנו מקודם.