

## תרגיל 10 – פתרון

א.

נסדר את פונק' המטרה:

$$z - 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$$

נסדר בטבלה:

איטרציה	משתני בסיס	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	RHS	$\frac{RHS}{c_{ij}}$	שורה	פעולות שורה
0	z	1	-3	-6	-2	0	0	0	-	R <sub>0</sub>	$\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2$
	s <sub>1</sub>	0	3	4	1	1	0	20	$\frac{20}{4} = 5$	R <sub>1</sub>	$R_0 + 6R_2 \rightarrow R_0$
	s <sub>2</sub>	0	1	3	2	0	1	10	$\frac{10}{3} = \frac{10}{3}$	R <sub>2</sub>	$R_1 - 4R_2 \rightarrow R_1$
1	z	1	-1	0	2	0	2	20	-	R <sub>0</sub>	$\frac{3}{5}R_1 \rightarrow R_1$
	s <sub>1</sub>	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{20}{3}$	4	R <sub>1</sub>	$R_0 + R_1 \rightarrow R_0$
	x <sub>2</sub>	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	10	R <sub>2</sub>	$-\frac{1}{3}R_1 + R_2 \rightarrow R_2$
2	z	1	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	24	-	R <sub>0</sub>	
	x <sub>1</sub>	0	1	0	-1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	4	-	R <sub>1</sub>	
	x <sub>2</sub>	0	0	1	$\frac{11}{9}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	2	-	R <sub>2</sub>	

לכן הפתרון הוא:

$$\begin{aligned} z &= 24 \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ב.

### שאלה 1

נכתוב כשווינונים:

$$\begin{aligned} z - 3x_1 - 9x_2 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + s_1 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 4 \\ x_i, s_i &\geq 0 \end{aligned}$$

נפתור בעזרת סימלפקס:

איטרציה	משתנה בסיס	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	RHS	יחס	פעולות שורה
0	z	1	-3	-9	0	0	0		
	s <sub>1</sub>	0	1	4	1	0	8	2	
	s <sub>2</sub>	0	1	2	0	1	4	2	
1	z	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18		$\frac{1}{4}R_2 \rightarrow R_2$
	x <sub>2</sub>	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2	8	$R_1 + 9R_2 \rightarrow R_1$
	s <sub>2</sub>	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$
2	z	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18		$2R_3 \rightarrow R_3$
	x <sub>2</sub>	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2		$R_1 + \frac{3}{4}R_3 \rightarrow R_1$
	x <sub>1</sub>	0	1	0	-1	2	0		$R_2 - \frac{1}{4}R_3 \rightarrow R_2$

הפתרון הוא  $x_2 = 2$ ,  $x_1 = 0$  ואז  $z = 18$ .  
 הבעייתיות היא שבאיטרציה הזו לא השתנה שום דבר בפתרון, לא נשארו משאבים ל- $x_1$ . זה נקרא פתרון מנוון.

## שאלה 2

נסדר כשוויונים:

$$\begin{aligned} z - 2x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + s_1 &= 5 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 4 \\ x_i, s_i &\geq 0 \end{aligned}$$

נפתור בסימפלקס:

איטרציה	משתנה בסיס	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	אגף ימין	יחס	פעולות שורה
0	$z$	1	-2	-4	0	0	0		$\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2$
	$s_1$	0	1	2	1	0	5	$2\frac{1}{2}$	$R_1 + 4R_2 \rightarrow R_1$
	$s_2$	0	1	1	0	1	4	4	$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$
1	$z$	1	0	0	2	0	10		$2R_3 \rightarrow R_3$
	$x_2$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	2.5	5	$R_2 - \frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3$
	$s_1$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	1.5	3	
2	$z$	1	0	0	2	0	10		
	$x_2$	0	0	1	1	-1	1		
	$x_1$	0	1	0	-1	2	3		

הבעייתיות במקרה זה היא שאחרי איטרציה אחת קיבלנו פתרון אופטימלי, אך כיוון שיש משתנה ( $x_1$ ) שאינו בבסיס אך יש לו מקדם 0 בפונק' המטרה (השורה הראשונה) לכן ניתן להגדילו כמה שרוצים בלי לשנות את הערך המקסימלי של  $z$  ולכן ניתן להכניסו לבסיס ולקבל פתרון אופטימלי נוסף (באיטרציה 2).

ג.

הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \min w &= 20y_1 + 12y_2 \\ \text{s.t.} &: 2y_1 + y_2 \geq 5 \\ &5y_1 + 3y_2 \geq 7 \\ &y_2 \geq 4 \\ &y_i \geq 0 \end{aligned}$$

נפתור את הפרימלית עם סימפלקס:

איטרציה	בסיס	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	RHS
0	$z$	1	-5	-7	-4	0	0	0
	$s_1$	0	2	5	0	1	0	20
	$s_2$	0	1	3	1	0	1	12
אחרונה (לא עשינו את שאר האיטרציות)	$z$	1	0	7.5	0	0.5	4	58
	$x_1$	0	1	2.5	0	0.5	0	10
	$x_3$	0	0	0.5	1	-0.5	1	2

אז הפתרון הוא

$$x_1 = 10, x_3 = 2, x_2 = 0, z = 58 = w$$

הפתרון של הדואלית הוא:

$$y_1 = 0.5, y_2 = 4, w = 58$$

נשים לב ש  $y_1, y_2$  הם בעצם מקדמי  $s_1, s_2$  באיטרציה האחרונה של הסימפלקס.