אינפי 4 - הרצאה 6

17 באוגוסט 2011

משטחים - הגדרה

משטח k-מימדי ב$\mathbb{R}^n$ (יריעה, המשוכנת ב$\mathbb{R}^n$) מוגדר כתמונה של העתקה גזירה ברציפות וחח"ע בפנים $F:\ Q\to\mathbb{R}^n$ כאשר:

$$Q=[a_1,\,b_1]\times[a_2,\,b_2]\times\ldots\times[a_n,\,b_n]$$

(זו תמונה גזירה ברציפות של תיבה k מימדית).

דוגמה

$$Q=[0,\,2\pi]\times[0,\,\pi]$$

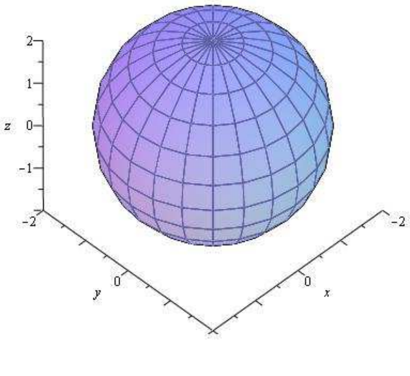
בתוך מישור $\theta\varphi$, נגדיר פונקציה:

$$\begin{aligned}F:\ Q&\to\mathbb{R}^3\\F_1(\theta,\,\varphi)&=a\sin\varphi\cos\theta\\F_2(\theta,\,\varphi)&=a\sin\varphi\sin\theta\\F_3(\theta,\,\varphi)&=a\cos\theta\end{aligned}$$

התמונה של F היא

$$\left\{(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=a^2\right\}$$

זו ספירה (פני הכדור) שמרכזה בראשית ורדיוסה a.



דוגמה נוספת

$$\begin{aligned} Q &= [0,\, 2\pi] \times [0,\, 2\pi] \\ F(\theta,\, \varphi) &= (\cos\theta,\, \sin\theta,\, \cos\varphi,\, \sin\varphi) \end{aligned}$$

זהו הטורוס השטוח:

$$S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

חישוב שטח (תכולה) של משטח k-מימדי

כדי לחשב שטח של משטח k-מימדי, נחלק את התיבה Q לריבועים (תיבות קטנות), שכל אחד שטחו h^k (צלעו h).
כל ריבוע כזה נעביר בעזרת העתקת הדיפרנציאל אל המישור המשיק למשטח בנק' כלשהי, כלומר אם יש לנו ריבוע Q_i אז נתבונן בתמונתו תחת dF_{q_i} (העברה מנק' בQ_i לנק' על מישור משיק).
אם נסכם את השטחים הk מימדיים של כל התמונות של כל הריבועים הנ"ל, בהנחה שהריבועים קטנים יותר ויותר ($h \to 0$), נקבל הערכה של השטח של המשטח כולו.

איך מחשבים שטח של תמונת ריבוע?

נסמן $p_i = dF_{q_i}(Q_i)$. p_i הוא מקבילון הנוצר ע"י הוקטורים:

$$h \cdot \frac{\partial F}{\partial u_1},\, ..,\, h \cdot \frac{\partial F}{\partial u_k}$$

כאשר $u_1,\, ...,\, u_k$ המשתנים של F.
אם A_i היא מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים הנ"ל אז השטח הk מימדי של p_i הוא:

$$\sqrt{\det\left(A_i^t A_i\right)}$$

אבל המטריצה A_i הנ"ל היא מטריצת יעקבי המוכפלת בh, ולכן השטח הנ"ל הוא

$$h^k \sqrt{\det\left(J^t(q_i) \cdot J(q_i)\right)}$$

אם נסכם את כל השטחים מצורה זו נקבל שהשטח הk מימדי של המשטח הוא בערך:

$$V(F) \approx \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\det\left(J^t(q_i) \cdot J(q_i)\right)} \cdot V(Q_i)$$

לכן אם נרצה להגדיר את השטח במדויק, נקבל:

$$V(F) = \iint_Q \sqrt{\det\left(J^t(\overrightarrow{u}) \cdot J(\overrightarrow{u})\right)} \overrightarrow{du}$$

דוגמה (שטח פנים של הספירה)

ניקח קורדינטות ספריות כדוריות:

$$\begin{aligned} F:\ [0,\,2\pi]\times[0,\,\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ F &= (a\sin\varphi\cos\theta,\ a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\theta) \end{aligned}$$

כאשר θ היא הזווית של ההיטל על xy, φ היא הזווית של הרדיוס עם ציר z. ניתן לחשב:

$$\sqrt{\det\left(J^t(\theta,\,\varphi)\cdot J(\theta,\,\varphi)\right)} = a^2\sin\varphi$$

לכן:

$$\begin{aligned} V(F) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\varphi d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\right)a^2 d\theta = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

דוגמה נוספת

אם $\gamma:\ [a,\,b]\to\mathbb{R}^n$ מגב"ת, אז:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t),\,..,\,\gamma_n(t))$$

$$\begin{aligned} J^t &= \overrightarrow{\gamma}(t) = \left(\gamma_1',\,..,\,\gamma_n'\right) \\ J^tJ &= \left(\gamma_1'\right)^2+...+\left(\gamma_2'\right)^2 \end{aligned}$$

לכן

$$\sqrt{\det(J^tJ)} = \sqrt{\left(\gamma_1'\right)^n+...+\left(\gamma_1'\right)^n} = \left\|\gamma'(t)\right\|$$

לכן השטח ה1 מימדי, כלומר האורך של המסילה הוא, כצפוי:

$$\int_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|dt$$

עוד דוגמה

שטח של משטח דו מימדי כלשהו ב$\mathbb{R}^n$.
נניח כי $\varphi:\ Q\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות כאשר Q מלבן ב$\mathbb{R}^2$, ונניח המשתנים הם $u,\,v$.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial v} \end{pmatrix}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
J^tJ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\left(\overrightarrow{\partial\varphi}\right)^t}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial u} & \frac{\left(\overrightarrow{\partial\varphi}\right)^t}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial v} \\ \frac{\left(\overrightarrow{\partial\varphi}\right)^t}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial u} & \frac{\left(\overrightarrow{\partial\varphi}\right)^t}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial v} \end{pmatrix} \\
\det\left(J^tJ\right) &= \left(\frac{\overrightarrow{\partial\varphi}^t}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial u}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\partial\varphi}^t}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial v}\right) - \left(\frac{\overrightarrow{\partial\varphi}^t}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\partial\varphi}^t}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial u}\right)
\end{aligned}$$

מסמנים:

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\overrightarrow{\partial\varphi}^t}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial u}\right) \\
G &= \left(\frac{\overrightarrow{\partial\varphi}^t}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial v}\right) \\
F &= \left(\frac{\overrightarrow{\partial\varphi}^t}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\partial\varphi}^t}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial\varphi}}{\partial u}\right)
\end{aligned}$$

לכן השטח של משטח דו מימדי הוא

$$\iint_D \sqrt{EG - F}dudv$$

הערה

אם המשטח ממימד 2 נמצא ב$\mathbb{R}^3$ (ורק במקרה זה) ניתן לחשב את אלמנט השטח של המשטח (הפונק' שבתוך אינטגרל השטח) גם ע"י מכפלה וקטורית.
כלומר, כאשר מחשבים את השטח הדו מימדי של תמונת כל ריבוע, במקום לקחת את $\sqrt{\det\left(J^tJ\right)}$ נוכל לקחת את <u>אורך</u> המכפלה הוקטורית של שני וקטורי הכיוון בכל נקודה, כלומר את:

$$\left\|\frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial u} \times \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial v}\right\| = \left\|\det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ - & \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial u} & - \\ - & \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial v} & - \end{pmatrix}\right\|$$

לכן השטח הוא

$$Area = \iint_Q \left\|\frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial u}(u,\, v) \times \frac{\overrightarrow{\partial F}}{\partial v}(u,\, v)\right\| dudv$$

דוגמה

לחשב את שטח הפנים של החרוט (קונוס) הנתון על ידי:

$$\begin{aligned} F(r,\theta) &= (r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, r) \\ 0\leq & \;\theta \leq 2\pi \\ 0\leq & \;r \leq 1 \end{aligned}$$

פתרון

אנו מחפשים את

$$\iint_D \left\| \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial r}(r,\theta)\times\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\theta}(r,\theta)\right\| drd\theta$$

כאשר:

$$D=\left\{(r,\theta)\;\middle|\;\begin{matrix}0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{matrix}\right\}$$

נחשב:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= (\cos\theta,\, \sin\theta,\, 1) \\ \frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta) &= (-r\sin\theta,\, r\cos\theta,\, 0) \end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}\times\frac{\partial F}{\partial\theta} &= \det\begin{pmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \cos\theta & \sin\theta & 1\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{pmatrix} \\ &= \hat{k}\cdot r - r\cos\theta\cdot\hat{\imath} + r\sin\theta\cdot\hat{\jmath} \\ &= (-r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, r) \\ \left\|\frac{\partial F}{\partial r}\times\frac{\partial F}{\partial\theta}\right\| &= \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} \\ &= r\sqrt{2} \end{aligned}$$

לכן השטח יהיה:

$$V(S)=\int_0^1\int_0^{2\pi} r\sqrt{2}d\theta dr - \sqrt{2}\pi$$

תבניות דיפרנציאליות - Differential Forms

הגדרה (תבנית - form)

1-תבנית (1-form) היא פונקציה לינארית $\varphi:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.
2-תבנית (2-form) היא פונקציה בילינארית מתחלפת $\varphi:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

φ בילינארית:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2},\,\overrightarrow{u}\right) &= \varphi\left(\overrightarrow{v_1},\,\overrightarrow{u}\right)+\varphi\left(\overrightarrow{v_2},\,\overrightarrow{u}\right)\\ \varphi\left(\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right) &= \varphi\left(\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v_1}\right)+\varphi\left(\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v_2}\right)\\ \varphi\left(\overrightarrow{u},\,\lambda\overrightarrow{v}\right)=\varphi\left(\lambda\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right) &= \lambda\varphi\left(\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)\end{aligned}$$

φ מתחלפת:

$$\varphi\left(\overrightarrow{v_1},\,\overrightarrow{v_2}\right)=-\varphi\left(\overrightarrow{v_2},\,\overrightarrow{v_1}\right)$$

דוגמאות

1. ב-$\mathbb{R}^2$, 2-תבנית היא למשל דטרמיננטה:

$$\varphi\left(\overrightarrow{v_1},\,\overrightarrow{v_2}\right)=\det\begin{pmatrix}| & |\\ \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2}\\ | & |\end{pmatrix}$$

כאשר

$$\overrightarrow{v_1},\,\overrightarrow{v_2}\in\mathbb{R}^2$$

2. ב-$\mathbb{R}^3$, אם $i=(1,\,2)$ אז נוכל להגדיר:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\overrightarrow{v_1},\,\overrightarrow{v_2}\right) &= \varphi\left(\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right),\,\left(y_1,\,y_2,\,y_3\right)\right)\\ &= \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

הגדרה - k-form

k-תבנית (k-form) על $\mathbb{R}^n$ היא פונקציה מולטי-לינארית מתחלפת:

$$\varphi:\ \left(\mathbb{R}^n\right)^k\to\mathbb{R}$$

מולטילינארית פירושו לינארית בכל רכיב לחוד.
מתחלפת פירושו כל החלפה של 2 ארגומנטים משנה סימן.

$$\varphi\left(\overrightarrow{v_1},\,...,\,\overrightarrow{v_i},\,...,\,\overrightarrow{v_j},\,...,\,\overrightarrow{v_n}\right)=-\varphi\left(\overrightarrow{v_1},\,...,\,\overrightarrow{v_j},\,...,\,\overrightarrow{v_i},\,...,\,\overrightarrow{v_n}\right)$$

תזכורת מלינארית

1-form היא העתקה ללינארית. בהינתן $T:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ העתקה לינארית, אם נקבע אותה על איברי בסיס היא תהיה מוגדרת באופן יחיד.
אם ניקח $\left(e_1,\,...,\,e_n\right)$ בסיס סטנדרטי אז אם נסמן $T\left(e_i\right)=a_i$ נקבל שלכל $v=\alpha_1e_1+...+\alpha_ne_n$:

$$T\left(\alpha_1e_1+...+\alpha_ne_n\right)=\alpha_1a_1+...+\alpha_na_n$$

הגדרה

נגדיר לכל $\vec{v}=(\alpha_1,\,....,\,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ פעולה dx_i:

$$dx_i\left(\vec{v}\right)=dx_i\left(\alpha_1,\,...,\,\alpha_n\right)=\alpha_i$$

כל dx_i כזה הוא העתקה לינארית, לכן 1-form.
והראנו למעשה, שכל 1-תבנית היא צ"ל לינארית של התבניות $dx_1,\,...,\,dx_n$.
כלומר אם φ היא 1-תבנית על $\mathbb{R}^n$ אז לכל $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\varphi\left(\vec{v}\right)=a_1dx_1\left(\vec{v}\right)+...+a_ndx_n\left(\vec{v}\right)$$

כדי לקבל עוד תבניות, ממימדים גבוהים יותר, נשתמש בהגדרה הבאה:

הגדרה

תהי I תת-סדרה עולה באורך k של $\{1,\,...,\,n\}$, התבנית dx_I מוגדרת להיות הפונקציה:

$$\begin{aligned}dx_I:\ \left(\mathbb{R}^n\right)^k &\to \mathbb{R}\\ dx_I\left(\vec{v_1},\,...,\,\vec{v_k}\right) &= \det\left(A_I\right)\end{aligned}$$

כאשר A_I היא המטריצה $k\times k$ שעמודותיה הן הוקטורים $\vec{v_1},\,..,\,\vec{v_k}$ ובשורותיה לוקחים <u>רק</u> את השורות

$$I=\left(i_1,\,...,\,i_k\right)$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}dx_{(1,\,2)}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\2\end{pmatrix}\right) &= \begin{vmatrix}1&3\\2&-2\end{vmatrix}=-8\\ dx_{(1,\,2,\,4)}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right) &= \begin{vmatrix}1&3&0\\2&-2&1\\1&2&1\end{vmatrix}=-7\end{aligned}$$

ברור, כי התבנית שהגדרנו dx_I היא מולטילינארית ומתחלפת (לפי תכונות הדטרמינ-נטה), לכן היא k-תבנית.

טענה

פונק' מולטילינארית φ היא מתחלפת $\iff$ $\varphi\left(v_1,\,...,\,v_k\right)=0$ בכל פעם ששניים (לפחות) מהוקטורים $v_1,\,...,\,v_k$ שווים.

הוכחה - כיוון ראשון

נניח φ מתחלפת לפי ההגדרה הרגילה. צ"ל שאם ב-k-יה של וקטורים יש לפחות 2 שווים אז $\varphi=0$.
נניח בה"כ ש$v_1=v_2$.

$$\begin{aligned}\varphi\left(v_1,\,v_1,\,..,\,v_k\right) &= -\varphi\left(v_1,\,v_1,\,...,\,v_k\right)\\ \varphi\left(v_1,\,..,\,v_k\right) &= 0\end{aligned}$$

הוכחה - כיוון שני

נניח שכל פעם שיש שני וקטורים שווים, φ מתאפסת.
צ"ל בה"כ:

$$\varphi\left(v_1,\,v_2,\,...,\,v_k\right)=-\varphi\left(v_2,\,v_1,\,...,\,v_k\right)$$

ובכן:

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi\left(v_1-v_2,\,v_1-v_2,\,v_3,\,..,\,v_k\right)\\
&= \varphi\left(v_1,\,v_1-v_2,\,v_3,\,...,\,v_k\right)-\varphi\left(v_2,\,v_1-v_2,\,..,\,v_k\right)\\
&= \varphi\left(v_1,\,v_1,\,..,\,v_k\right)-\varphi\left(v_1,\,v_2,\,..,\,v_k\right)-\varphi\left(v_2,\,v_1,\,...,\,v_k\right)+\varphi\left(v_2,\,v_2,\,...,\,v_k\right)\\
&= 0-\varphi\left(v_1,\,v_2,\,..,\,v_k\right)-\varphi\left(v_2,\,v_1,\,..,\,v_k\right)+0\\
\varphi\left(v_1,\,v_2,\,...,\,v_k\right) &= -\varphi\left(v_2,\,v_1,\,...,\,v_k\right)
\end{aligned}$$

המשמעות הגאומטרית של התבניות הבסיסיות dX_I

ניקח למשל:

$$dx_{(1,\,2)}\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\,\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

כלומר $dx_{(1,\,2)}$ מחשבת את השטח המסומן של המקבילית הנפרשת ע"י הטלה של הוקטורים $\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}$ על מישור xy.

באופן כללי

dx_I המחושב על $v_1,\,...,\,v_k$ הוא הרכיב בI של השטח המסומן הk מימדי של המקבילון $P\left(v_1,\,..,\,v_k\right)$.

הגדרה

קבוצת כל ה-k-תבניות על $\mathbb{R}^n$ עם חיבור (תבניות) וכפל תבנית בסקלר מהווה מרחב וקטורי. מסמנים מרחב זה ב$A^k\left(\mathbb{R}^n\right)$.
נתבונן בקב' כל התבניות מהצורה dx_I כאשר I רץ על כל הסדרות העולות באורך k של $\{1,\,..,\,n\}$ (בלי חזרות).
נסמן את הקבוצה הנ"ל בB. ברור כי $|B|=\binom{n}{k}$.

משפט

B היא בסיס של $A^k\left(\mathbb{R}^n\right)$, כלומר כל k-תבנית ב$\mathbb{R}^n$, φ, מקיימת פרישה (ובת"ל, בהמשך):

$$\varphi=\sum_I a_I dx_I$$

כאשר

$$a_I=\varphi\left(e_{i_1},\,..,\,e_{i_k}\right)$$

הוכחה

תהי $\varphi \in A^k(\mathbb{R}^n)$. לכל $I=(i_1,..,i_k)$ נסמן:

$$a_I=\varphi\left(e_{i_1},..,e_{i_k}\right)$$

ונגדיר:

$$\psi=\sum_I a_I dx_I$$

צריך להוכיח $\varphi=\psi$.
נחלק את ההוכחה לשלבים.

למה 1

יהיו $I=(i_1,..,i_k)$ ו-$J=(j_1,..,j_k)$ סדרות עולות מתוך $\{1,...,n\}$ אז:

$$dx_I\left(e_{j_1},..,e_{j_k}\right)=\begin{cases}1 & I=J\\ 0 & I\neq J\end{cases}$$

הוכחת הלמה

$dx_I\left(e_{j_1},..,e_{j_k}\right)$ היא הדטרמיננטה של המטריצה $k\times k$ שעמודותיה הן $e_{j_1},..,e_{j_k}$
כאשר קיימות רק השורות $i_1,..,i_k$.
זו מטריצת היחידה $\iff I=J$ ואז הדטרמיננטה היא 1.
אחרת, אם $I\neq J$, בהכרח תהיה במטריצה שורת אפסים והדטרמיננטה תתאפס.
את המשך ההוכחה נראה בהרצאה הבאה.