תרגול 4 - עם פתרונות מלאים

מרחבים קומפקטיים

1. הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. נאמר ש $A \subseteq X$ קומפקטי אם מתקיימת התכונה הבאה: לכל קבוצה של קבוצות פתוחות $\{O_i\} \subseteq top(X,d)$ שמקיימת, $A \subseteq \bigcup_i O_i$, יש תת קבוצה סופית, $\{O_{i_1},...,O_{i_n}\}$ כך ש $A \subseteq O \cup ... \cup O_{i_n}$. במילים: מרחב קומפקטי הוא מרחב המקיים כי לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי.

   (א) דוגמא: אם X מרחב סופי, אזי הוא קומפקטי. (לא משנה מה המטריקה עליו)

2. משפט: ב $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית מתקיים כי: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטי אמ״מ הוא סגור וחסום.

   (א) למשל הקבוצה $[0,1] \cup [5,15]$ קומפק'.

   (ב) תרגיל: במרחב מטרי כללי הטענה לא נכונה,
   הוכחה: ניקח את המרחב $(\mathbb{N}, d_{disc})$, כלומר, קבוצת המספרים הטבעיים עם המטריקה הדסקרטית (מטריקת 0-1). אזי בתוך מרחב מטרי זה, $\mathbb{N}$ היא קבוצה סגורה וחסומה- סגורה, מכיוון ש$\mathbb{N}^c = \emptyset$, וקבוצה ריקה תמיד פתוחה. חסומה- מכיוון ש$diam(\mathbb{N}) =$ 1. אולם, והיא לא קומפקטית, כי הקבוצה $\{B(n,0.25)=\{n\}\}$ מהווה כיסוי פתוח של $\mathbb{N}$, אשר אין לו תת כיסוי סופי. (שימו לב שעבור כל איבר שנוריד מהקבוצה- לא נקבל יותר כיסוי.)

3. תרגיל: כל קבוצה קומפקטית היא חסומה.
   הוכחה: תהי A קבוצה קומפקטית. אם A ריקה- סיימנו. אחרת, נבחר $x \in A$. נסכל על הכיסוי הפתוח הבא: $\{B(x,n)\}_n$. שימו לב ש$A \subseteq \bigcup B(x,n)$, כיוון שלשכל $a \in A$, קיים איזשהו $n \in \mathbb{N}$ כך ש$d(a,x) < n$. כעת, לפי קומפקטיות A, לכיסוי הנ"ל יש תת כיסוי סופי. כלומר, יש מספר סופי של רדיוסים $n_1,...,n_k$ כך ש$A \subseteq B(x,n_1) \cup ... \cup B(x,n_k)$. A חוכלת האיחוד סופי של קבוצות חסומות ולכן חסומה. (למעשה, הכדורים הנ"ל מוכלים אחד בשני, ולכן אם נסמן בn_0 את הרדיוס המקסימלי נקבל ש $A \subseteq B(x,n_0)$).

4. הגדרה: יהי (X,d) מ"מ. נאמר ש X חסום כליל אם לכל רדיוס r יש מספר סופי של כדורים $B(x_i,r)$ עם רדיוסים כלשהם $x_i \in X$, שמהווים כיסוי ל X. כלומר, $X \subseteq \bigcup B(x_i,r)$.

5. טענה: כל מרחב קומפקטי הוא חסום כליל. (במילים אחרות: קומפקטיות גוררת חסימות כליל).
   הוכחה: לכל רדיוס ממשי r נסתכל על הכיסוי $\{B(x,r)\}_{x \in X}$. זהו כיסוי פתוח של X, מכיוון שלכל $x \in X$ מתקיים ש $x \in B(x,r)$. מכיוון שX קומפטי, לכיסוי הנ"ל תת כיסוי סופי, כלומר יש מספרי סופי של xים, $x_1,...,x_n$ כך ש $X \subseteq B(x_1,r) \cup ... \cup B(x_n,r)$.

6. תרגיל: חסימות כליל היא תורשתית. כלומר, אם (X,d) הוא מרחב חסום כליל, ו$Y\subseteq X$ הוא תת קבוצה של X, אזי (Y,d) (כלומר, מסתכלים על Y כמ"מ עם המטריקה המושרית) הוא מרחב חסום כליל.

הוכחה: יהי רדיוס r. מחסימות כליל של X, יש מספר סופי של xים בX, $x_1,...,x_n\in X$, כך ש $X\subseteq B(x_1,r)\cup...\cup B(x_n,r)$.. כעת לכל i אם $B(x_i,\frac{r}{2})\cap Y$ אינו ריק אזי נבחר מתוכו y_i. כעת נטען כי $Y\subseteq\bigcup B(y_i,r)$. הוכחת הטענה: יהי $y\in Y$. קיים x_i כך ש$y\in B(x_i,\dfrac{r}{2})$, מכיוון שאוסף הכדורים הנ"ל מהווה כיסוי של X. כעת, נובע מכך ש$Y\cap B(x_i,\dfrac{r}{2})\neq\emptyset$, ולכן בחרנו ממנו איזשהו y_i. $d(y,y_i)\leq d(y,x_i)+d(x_i,y_i)<\dfrac{r}{2}+\dfrac{r}{2}=r$. לכן $y\in B(y_i,r)$.

7. תרגיל: סגור של חסום כליל הוא חסום כליל. כלומר, אם (X,d) מ"מ ו$A\subseteq X$ היא תת קבוצה חסומה כליל, אז $cl(A)$ גם חסומה כליל.

הוכחה: תהא A קבוצה חסומה כליל. יהי r רדיוס ממשי כלשהו. קיימים $a_1,...,a_n\in A$ כך ש $A\subseteq\bigcup B(a_i,\dfrac{r}{2})$. טענה: $B(a_i,r)$ מהווה כיסוי סופי של $cl(A)$. הוכחה: יהא $x\in cl(A)$. אם $x\in A$ סיימנו. אחרת, מכיוון ש$d(x,A)=0$, קיים$x'\in A$ כך ש $d(x,x')<\dfrac{r}{2}$. $x'\in A$, לכן קיים j כך ש $x'\in B(a_j,\dfrac{r}{2})$. עבור אותו a_j נקבל ש: $d(x,a_j)\leq d(x,x')+d(x',a_j)<\dfrac{r}{2}+\dfrac{r}{2}=r$. כלומר, $x\in B(a_j,r)$.

מרחבים טופולוגים

1. הגדרה: תהי X קבוצה. טופולוגיה על X היא תת קבוצה של $P(X)$ שנסמן בτ, (כלומר $\tau\subseteq P(X)$) (במילים: אוסף של תתי קבוצות של X), שמקיים 3 תכונות:

   (א) $X,\emptyset\in\tau$.

   (ב) τ סגור לאיחוד כלשהו. כלומר, אם $O_i\in\tau$ לכל i, אז $\bigcup_i O_i\in\tau$.

   (ג) τ סגור לחיתוך סופי. כלומר, אם $O_1,...,O_n\in\tau$, אז $O_1\cap...\cap O_n\in\tau$. (שימו לב שזה שקול לדרוש סגירות ליתוך של 2 קבוצות)

2. קבוצה $O\in\tau$ נקראת פתוחה. וקבוצה תקרא סגורה אם המשלים של פתוח. כלומר, C סגורה אם $C^c\in\tau$.

3. דוגמאות:

   (א) לכל קבוצה X אפשר לקחת $\tau=P(X)$. קל לראות שקבוצה זו עונה על 3 הדרישות ולכן היא מהווה טופולוגיה. טופולוגיה זו נקראת הטופולוגיה הדיסקרטית. בטופולוגיה זו כל הקבוצות פתוחות. בפרט, גם כל הקבוצות סגורות.לכל קבוצה X אפשר לקחת את $\tau=\{X,\emptyset\}$. קל לראות שקבוצה זו עונה על 3 הדרישות ולכן היא מהווה טופולוגיה. טופולוגיה זו נקראת הטופולוגיה הטריוויאלית. בטופולוגיה זו הקבוצות הפתוחות והסגורות היחידות הן X ו$\emptyset$.

   (ב) לכל מרחב מטרי (X,d) ניתן להגדיר את הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה. כלומר, האוסף של כל הקבוצות שפתוחות לפי המטריקה.

   (ג) לכל קבוצה X אפשר לקחת את האוסף הבא: $\tau=\{\emptyset\}\cup\{O:|O^c|<\infty\}$ כלומר, הקבוצות הפתוחות הן כל הקבוצות שהמשלים שלהן סופי, והקבוצה הריקה

(יתכן שהמשלים שלה אינו סופי). באופן שקול אפשר להגיד שהקבוצות הסגורות הן הקבוצות הסופיות, וX.

i. תרגיל: הטופולוגיה הקוסופית היא אכן טופולוגיה.

הוכחה: נראה ש3 התכונות מתקיימות.

$X, \emptyset \in \tau$: $\emptyset$, ישירות מהגדרה. וX מכיוון ש$|X^c| = |\emptyset| = 0 < \infty$.

איחוד כלשהוא: יהיו $O_i \in \tau$. אם כולן ריקות, אז $\bigcup O_i = \emptyset \in \tau$. אחרת, קיימת לפחות קבוצה אחת, נניח O_1, כך ש$|O_1^c| < \infty$. ולכן $|(\cup O_i)^c| = |\cap O_i^c| \leq |O_1^c| < \infty$. מכאן ש$\bigcup O_i \in \tau$.

חיתוך של 2: יהיו $O_1, O_2 \in \tau$. אם אחת מהן ריקה, החיתוך ריק, וסיימנו. אחרת, לשתיהן יש משלים סופי. $|(O_1 \cap O_2)^c| \leq |O_1^c| + |O_2^c| < \infty$. מכאן ש$O_1 \cap O_2 \in \tau$.

ii. הערה: אם X סופית אזי הטופולוגיה הקו-סופית = הטופולוגיה הדיסקרטית.

4.] ניתן לדלג[הגדרה: יהא a שלם ו d טבעי אזי נגדיר $S_{a,d} = a + d\mathbb{Z}$. נגדיר על השלמים τ כך: קבוצה O היא פתוחה אמ"מ $O = \cup_{(a,d)} S_{a,d}$.

(א) תרגיל: זוהי אכן טופולוגיה

הוכחה: הקבוצה הריקה= איחוד ריק של סדרות דו"צ. השלמים = $S_{0,1}$. איחוד כלשהוא - ברור. חיתוך של 2 -

$$O_1 \cap O_2 = \cup_{(a_1,d_1)\in I_1} \cup_{(a_2,d_2)\in I_2} \left(S_{a_1,d_1} \cap S_{a_2,d_2}\right)$$

נראה כי $S_{a_1,d_1} \cap S_{a_2,d_2} \in \tau$: אם החיתוך ריק סיימנו. אחרת a בחיתוך ואז טענה: $S_{a_1,d_1} \cap S_{a_2,d_2} = S_{a,lcm\{d_1,d_2\}}$: ההכלה $(\supseteq)$ ברורה כי $a + klcm\{d_1, d_2\} = a_i + k_i d_i + klcm\{d_1, d_2\}$ בכיוון $(\subseteq)$ יהא

$$x = a_1 + k_1 d_1 = a_2 + k_2 d_2$$

לכן $x - a = k_1' d_1 = k_2' d_2$ ולכן מתחלק ע"י d_i ולכן ע"י $lcm\{d_i\}$ ולכן $x = a + klcm\{d_i\}$

(ב) הערה: $S_{a,d}$ פתוחה

(ג) תרגיל: $S_{a,d}$ סגורה.

הוכחה: $S_{a,d}^c = \cup_{i=1}^{d-1} S_{a+i,d}$

5. הגדרה: יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. נאמר שהוא מטריזיבלי אם קיימת מטריקה d על X כך ש$\tau = top(d)$. כלומר הטופולוגיה מושרית מהמטריקה.

(א) דוגמא: הטופולוגיה הדיסקטרית מושרית מהטריקה הדיסקרטית.

(ב) דוגמא: $X = \{a, b\}$ ו $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. הטופולוגיה הנ"ל לא מטריזבילית, כי במטריקה כל נקודון סגור אבל אצלנו $\{a\}$ לא סגור כי $\{a\}^c = \{b\}$ לא פתוח.

(ג) דוגמא: נגדרי טופולוגיה חדשה: ניקח את הקבוצה $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ (עבור $p \notin \mathbb{R}$). כלומרת לקחנו את הממשיים, והוספנו להם איבר נוסף. ונגדיר: $\tau = \{O : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$.

(ד) תרגיל קשה: הטופולוגיה מהסעיף הקודם אינה מטריזבילית.

הוכחה: הקבוצה $\mathbb{R}$ פתוחה ולכן המשלים שלה $\{p\}$ סגור. ראינו בתרגול 2 שבמרחב מטרי, כל קבוצה סגורה היא חיתוך בן מניה של כל קבוצות פתוחות. טענה: $\{p\}$אינו חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות. הוכחה: אחרת $\{p\} = \cap_{i\in\mathbb{N}} O_i,$ ולכן לכל i $p \in O_i$ ולכן $|O_i^c| \leq \aleph_0$, מכיוון שהן פתוחות, ולא מקיימות את התנאי הראשון. בנוסף אם ניקח משלים נקבל כי $\mathbb{R} = \cup_i O_{i,}^c$ כלומר הממשיים הם איחוד בן מניה של בנות מניה, ולכן $\mathbb{R}$ בת מניה. סתירה. לכן X אינו מטריזבילי.

התכנסות

1. הגדרה: (X,τ) מ״ט . נאמר שסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל x ונסמן $x_n \to x$ אם לכל סביבה U של x, כלומר קבוצה פתוחה U כך ש $x \in U$, קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $x_n \in U$.

   (א) דוגמא: סדרה קבועה $x_n = a$ מתכנסת ל $x = a$, בכל טופולוגיה.

   (ב) דוגמא $X = \{a,b\}$ ו $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ אזי הסדרה הקבועה $x_n = a$ לכל n, מקיימת $x_n \to a$ וגם $x_n \to b$ (כי הסביבה היחידה של b היא X..

   (ג) תרגיל: $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ (עבור $p \notin \mathbb{R}$) ונגדיר $\tau = \{O : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו כי כל סדרה מתכנסת היא קבוע לבסוף.
   פתרון: נניח שמתקיים שהסדרה $x_n \to x$. נוכיח ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף על x. ובכן, נגדיר $O = (X \setminus \{x_n\}) \cup \{x\}$. אזי O פתוחה כי $O^c \subseteq \{x_n\}$ ולכן בת מניה. כלומר, O היא סביבה של x. כעת, נתון ש$x_n \to x$. אז קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $x_n \in O$. לא ייתכן ש $x_n \in X \setminus \{x_n\}$, ולכן $x_n \in \{x\}$. כלומר, $x_n = x$. מש"ל.

רציפות

1. הגדרה: יהיו $(X,\tau), (Y,\tau')$ מ״ט ו $f : X \to Y$. נאמר ש f רציפה ב $x \in X$ אם לכל סביבה פתוחה V של $f(x)$ קיימת סביבה פתוחה U של x כך ש $U \subseteq f^{-1}(V)$.

   (א) פונקציה $f : X \to Y$ תקרא רציפה אם היא רציפה בכל $x \in X$. זה שקול לכך ש: תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה . כלומר, לכל $O \subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(O) \subseteq X$ פתוחה. (כמובן בטופולוגיות המתאימות).

   (ב) דוגמא: כל פונקציה $f : (X, \text{disc}) \to (Y,\tau')$ רציפה. כי בטופולוגיה הדיסקרטית כל קבוצה פתוחה.

   (ג) כל פונקציה $f : (X,\tau) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$ רציפה כי בטופולוגיה הטריוויאלית הקבוצות הפתוחות היחידות הן $\emptyset$ וY, ו- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X$, ואילן קבוצות שפתוחות בכל טופולוגיה.

   (ד) למשל $id : (X,\tau) \to (X,\tau)$ רציפה.

   (ה) כל פונקציה f רציפה בין מרחבים מטריים, רציפה גם בין הטופולוגיות שמושרות מהם.

2. תרגיל: תהא $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{2\}\}$ טופלוגיה על $\mathbb{R}$. נגדיר $f(x) = 2x$, מצאו באלו נקודות f רציפה .
   פתרון: לכל $x \neq 1$ הסביבה היחידה של $f(x)$ היא $\mathbb{R}$ והתמונה ההפוכה שלה היא $\mathbb{R}$ שהיא פתוחה, ולכן f רציפה בה. עבור $x = 1$, $f(x) = 2$. נסתכל על הסביבה הפתוחה של 2: $\{2\}$. לא קיימת שום סביבה פתוחה של 1 (כלומר, קבוצה פתוחה שמכילה את 1) שהתמונה שלה מוכלת ב$\{2\}$. לכן הפונקציה אינה רציפה ב1. .

   (א) תרגיל: מצאו τ על $\mathbb{R}$ כך שחיבור של פונקציות רציפות $f, g : (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R}\tau)$ אינה פונקציה רציפה בהכרח.
   פתרון: $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{2\}\}$ ו $f = g = id$ רציפות. אבל החיבור שלהם היא $h(x) = 2x$ שאינה רציפה.

3. תרגיל: יהיו $(X,\tau), (Y,\tau')$ מ״ט ו $f : X \to Y$ רציפה. אזי f שומרת על התכנסות. כלומר לכל סדרה: $x_n \to x$ מתקיים: $f(x_n) \to f(x)$

הוכחה: תהי $x_n \to x$. אנחנו רוצים להוכיח ש$f(x_n) \to f(x)$. ובכן, תהא V סביבה פתוחה של $f(x)$. כלומר, קבוצה פתוחה שמכילה את $f(x)$. מתנאי שקול לרציפות, $f^{-1}(V)$ פתוחה. כמו כן, ברור ש$x \in f^{-1}(V)$. לכן מהגדרת התכנסות, קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$: $x_n \in f^{-1}(V)$. מכאן ש$f(x_n) \in V$. מש"ל.

(א) תרגיל: ההפך לא נכון. תהא $f : X \to Y$ פונקציה ששומרת על התכנסות. אזי ייתכן ש f לא רציפה.

פתרון: נסתכל על $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עם $\tau = \{O : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$ אזי $Id : (X, \mathrm{disc}) \to (X, \tau)$ לא רציפה כי $id^{-1}(\{p\}) = \{p\}$ אינו פתוח. אבל שומרת על התכנסות כי כל סדרה שמתכנסת בטופולוגיה הלא דיסקרטית על $\mathbb{R} \cup \{p\}$. כלומר, אם $x_n \to x$, אז (x_n) קבועה לבסוף על x. אבל אז $f(x_n)$ קבועה לבסוף על $f(x)$, ולכן $f(x_n) \to f(x)$.