תרגיל 4 – מופשטת

<u>שאלה 1</u>

א. האם קיים מונומורפיזם מ- $GL_5(\mathbb{Q})$ ל-$(\mathbb{Q}^5,+)$? (כאשר- $\mathbb{Q}^5=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$).

ב. האם קיים אפימורפיזם מ- $(M_5(\mathbb{Q}),+)$ ל- $(\mathbb{Q}^5,+)$?

<u>פתרון</u>

א) לא. נניח בשלילה שקיים מונומורפיזם כזה f. אזי $GL_5(\mathbb{Q})\cong \mathrm{Im}(f)\leq\mathbb{Q}^5$ אבל $\mathrm{Im}(f)$ אבלית ו $GL_5(\mathbb{Q})$ אינה אבלית ולכן הן אינן יכולות להיות איזומרפיות.

ב) יש למצוא אפימורפיזם מ- $(M_5(\mathbb{Q}),+)$ ל- $(\mathbb{Q}^5,+)$. ראשית, שימו לב ש- $(M_5(\mathbb{Q}),+)$ איזומורפית ל- $(\mathbb{Q}^{25},+)$: פשוט שימו את כל איברי המטריצה בשורה אחת בת 25 כניסות (ז"א – וקטור ב- $\mathbb{Q}^{25}$). קל לראות שזהו איזומורפיזם. שנית, נגדיר את האפימורפיזם $f:(\mathbb{Q}^{25},+)\to(\mathbb{Q}^5,+)$ על ידי $f(a_1,a_2,...,a_{25})=(a_1,a_2,...,a_5)$ (בדקו שזהו הומומורפיזם ושהוא על).

<u>שאלה 2</u>

א. הראו שהומומורפיזם $\varphi:G\to H$ הוא חח"ע אם ורק אם $\ker\varphi=\{1_G\}$.

ב. הראו שאם $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם, אזי $o(\varphi(a))=o(a)$ לכל $a\in G$.

ג. הראו שאפימורפיזם מעביר קבוצת יוצרים לקבוצת יוצרים.

<u>פתרון</u>

א) $\Leftarrow$: $\varphi:G\to H$ הומומרפיזם ולכן מתקיים בהכרח $\varphi(1_G)=1_H$ ומהעובדה שהוא חח"ע נובע ש $\varphi(g)\neq 1_H \quad \forall g\neq 1_G$. מכאן $\ker\varphi=\{1_G\}$.

$\Rightarrow$: כדי להוכיח ש φ חח"ע נניח ש $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ ונראה ש $g_1=g_2$. $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$ ולכן $\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1}=1_H$. מכיון ש φ הומומרפיזם מתקיים $\varphi(g_1g_2^{-1})=\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1}$ ולכן $\varphi(g_1g_2^{-1})=1_H$. כלומר $g_1g_2^{-1}\in\ker\varphi$. אך מהנתון $\ker\varphi=\{1_G\}$ ומכאן $g_1g_2^{-1}=1_G$ ולבסוף נקבל ש $g_1=g_2$.

ב) למעשה מספיק היה לדרוש בשאלה מונומורפיזם. יהי $a\in G$. מקרה ראשון: $o(a)=\infty$. נראה שאז $o(\varphi(a))=\infty$. נניח בשלילה שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $(\varphi(a))^n=1_H$ אזי

$\varphi(a^n)=\left(\varphi(a)\right)^n=1_H$ ולכן $a^n\in\ker\varphi$ ומכיון ש φ חח"ע אז בהכרח $a^n=1_G$. נקבל ש $o(a)<\infty$ בסתירה להנחה.

מקרה שני: $o(a)<\infty$.

עפ"י מה שהוכחנו בתרגול מכיון שזהו הומורפיזם וכן $o(a)<\infty$ אז מתקיים $o\left(\varphi\left(a\right)\right)|o\left(a\right)$ ובפרט $m:=o(\varphi\left(a\right))<\infty$. מצד שני $\varphi\left(a^m\right)=\varphi\left(a\right)^m=1_H$ ולכן $a^m\in\ker\varphi$ ובשל החח"ע נקבל ש $a^m=1_H$. מכאן, $o\left(a\right)|\,m$. כלומר $o\left(a\right)|o\left(\varphi\left(a\right)\right)$. מכיון שיחס החילוק מעל קבוצת הטבעיים הוא אנטיסימטרי נקבל ש $o\left(\varphi\left(a\right)\right)=o\left(a\right)$.

ג) יהי $\varphi:G\to H$ אפימורפיזם ונניח ש $\left\langle a_i:i\in I\right\rangle=G$. נראה ש- $\left\langle\varphi\left(a_i\right):i\in I\right\rangle=H$. יהי $h\in H$ אזי מכיון ש $\varphi:G\to H$ אפימורפיזם קיים $g\in G$ כך ש- $\varphi(g)=h$. מכיון ש $\left\langle a_i:i\in I\right\rangle=G$ נקבל שקיימים : $k\in\mathbb{N}$, $i_1,i_2,i_3,\dots i_k\in I$ (לא בהכרח שונים) וכן $r_1,r_2,\dots r_k\in\mathbb{Z}$ כך ש $g={a_{i_1}}^{r_1}{a_{i_2}}^{r_2}\cdots{a_{i_k}}^{r_k}$. מתקיים $h=\varphi(g)=\varphi({a_{i_1}}^{r_1}{a_{i_2}}^{r_2}\cdots{a_{i_k}}^{r_k})=\varphi\left({a_{i_1}}^{r_1}\right)\varphi\left({a_{i_2}}^{r_2}\right)\cdots\varphi\left({a_{i_k}}^{r_k}\right)$. זה כמובן מוכיח ש $\left\langle\varphi\left(a_i\right):i\in I\right\rangle=H$.

<u>שאלה 3</u>

א. הוכיחו שחיתוך כלשהו של תתי חבורות הוא תת חבורה.
ב. יהיו $H,K\le G$ תת חבורות. נגדיר את הקבוצה $HK=\left\{hk:h\in H,k\in K\right\}$. הוכיחו: HK תת חבורה של G אם ורק אם $HK=KH$.
ג. הסיקו מסעיף ב' כי אם N ת"ח נורמלית של G ו- H ת"ח של G אז HN ת"ח של G.
ד. הוכיחו כי אם N_1,N_2 תח"נ של G אז $N_1\cap N_2$ ו- N_1N_2 תח"נ של G.

<u>פתרון</u>

<u>תזכורת</u>: כדי להוכיח ש $\varnothing\neq H\subseteq G$ היא ת"ח, מספיק להוכיח שלכל $a,b\in H$ מתקיים $ab^{-1}\in H$.

א) תהי G חבורה ונניח שלכל $i\in I$, $H_i\le G$. נראה ש $\bigcap_{i\in I}H_i\le G$.

יחידה: לכל $i\in I$ $e_G\in H_i$ שכן מדובר בתתי חבורות ומכאן $e_G\in\bigcap_{i\in I}H_i$.

נניח ש $t,s\in\bigcap_{i\in I}H_i$ ונוכיח ש $t^{-1}s\in\bigcap_{i\in I}H_i$. לכן $t,s\in\bigcap_{i\in I}H_i$ $\forall i\in I$ $t,s\in H_i$. מכיון שלכל $i\in I$ $H_i\le G$ נקבל ש $t^{-1}s\in H_i$ לכל $i\in I$ ומכאן $t^{-1}s\in\bigcap_{i\in I}H_i$.

ב) בכיוון הראשון ($\rightarrow$):

$$1 = 1*1 \in HK \neq \phi$$
$$h_1k_1, h_2k_2 \in HK \Rightarrow h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1\underbrace{k_1k_2^{-1}}_{\in K}h_2^{-1} =$$
$$[let:\ \ k_3 = k_1k_2^{-1}, h_3 = h_2^{-1}] = h_1\underbrace{k_3h_3}=$$
$$[Note:\ \ HK = KH\ \ implies: \exists h_4 \in H, k_4 \in K\ \ such\ that: k_3h_3 = h_4k_4] =$$
$$\underbrace{h_1h_4}_{\in H}k_4 \in HK \Rightarrow HK \leq G$$

בכיוון השני ($\leftarrow$):

נשים לב שעבור חבורה X : $X = X^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in X\}$

ולכן : $G \geq HK = (HK)^{-1} = \underbrace{K^{-1}}_{\leq G}\underbrace{H^{-1}}_{\leq G} = KH$

ג) N נורמלית לכן $HN = NH$. לפי סעיף ב' נקבל כי HN אכן תת-חבורה.

ד) <u>חיתוך</u>:
נתון $N_1 \lhd G, N_2 \lhd G$, צריך להוכיח כי $N_1 \cap N_2 \lhd G$. אנחנו כבר יודעים שחיתוך של ת"ח הוא ת"ח, כלומר $N_1 \cap N_2 \leq G$ ונשאר רק להראות כי $N_1 \cap N_2$ נורמלית. יהיו $h \in N_1 \cap N_2$, $g \in G$. צ"ל כי $ghg^{-1} \in N_1 \cap N_2$. $h \in N_1 \cap N_2$ לכן $h \in N_1$ וכיוון ש-N_1 נורמלית נקבל $ghg^{-1} \in N_1$. באותו האופן מהנורמליות של N_2 נקבל $ghg^{-1} \in N_2$. לכן סה"כ $ghg^{-1} \in N_1 \cap N_2$ כדרוש.

<u>מכפלה</u>:
נתון $N_1 \lhd G, N_2 \lhd G$, צריך להראות כי $N_1N_2 \lhd G$. שימו לב כי לפי סעיף ג' $N_1N_2 \leq G$ ולכן נשאר רק להראות ש-N_1N_2 נורמלית. יהיו $h \in N_1N_2$, $g \in G$. צ"ל כי $ghg^{-1} \in N_1N_2$. כיוון ש-$h \in N_1N_2$ קיימים $h_1 \in N_1, h_2 \in N_2$ כך ש-$h = h_1h_2$. כיוון ש-N_1 נורמלית נקבל $gh_1g^{-1} \in N_1$ וכיוון ש-N_2 נורמלית נקבל $gh_2g^{-1} \in N_2$. לכן $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} = h \in N_1N_2$ כפי שרצינו להראות.

<u>שאלה 4</u>

תהי D_4 החבורה הדיהדרלית ויהיו $\sigma, \tau \in D_4$ (כאשר τ איבר מסדר 2 – שיקוף, ו-σ איבר מסדר 4 – סיבוב ב- 90 מעלות).

נגדיר את תתי החבורות הציקליות $H = \langle \tau \rangle$, $K = \langle \sigma^2 \rangle$.

א) כתבו במפורש את אברי תתי החבורות H, K וחשבו את $[D_4 : H], [D_4 : K]$.

ב) כתבו את המחלקות השמאליות של H, K ב- D_4. האם הן תת חבורות נורמליות?

<u>פתרון</u>

א. $H = \{e, \tau\}$, $K = \{e, \sigma^2\}$. לפי משפט לגרנז' אם $H \leq G$ אז $[G:H] = \dfrac{|G|}{|H|}$.

במקרה שלנו $[G:H]=\frac{|G|}{|H|}=\frac{8}{2}=4$ ו- $[G:K]=\frac{|G|}{|K|}=\frac{8}{2}=4$.

ב.
I) המחלקות השמאליות של H ב- G הן:

$$H=\{e,\tau\},H\cdot\sigma=\{\sigma,\tau\sigma\}=\{\sigma,\sigma^3\tau\},$$
$$H\cdot\sigma^2=\{\sigma^2,\tau\sigma^2=\sigma^2\tau\},H\cdot\sigma^3=\{\sigma^3,\tau\sigma^3=\sigma\tau\}$$

H אינה נורמלית ב- G כי:

$$\{\sigma,\sigma\tau\}=\sigma\cdot H\neq H\cdot\sigma=\{\sigma,\tau\sigma\}=\{\sigma,\sigma^3\tau\}.$$

II) המחלקות השמאליות של K ב- G הן:

$$K=\{e,\sigma^2\},\sigma\cdot K=\{\sigma,\sigma^3\},\tau\cdot K=\{\tau,\tau\sigma^2\},\tau\sigma\cdot K=\{\tau\sigma,\tau\sigma^3\}$$

ניתן לבדוק שכל המחלקות הימניות שוות לשמאליות (של אותו איבר ביחס ל- K) ולכן K נורמלית.
אנחנו נבדוק את התנאי לנורמליות: לכל $g\in G,k\in K$ מתקיים $gkg^{-1}\in K$.
עבור $e\in K$ התנאי מתקיים לכל $g\in G$ ($geg^{-1}=e\in K$). נראה שהתנאי מתקיים ל- $\sigma^2\in K$ ולכל $g\in G$. את כל אברי G ניתן להציג כ- $g=\sigma^n$ או $g=\tau\sigma^n$ עבור $n=0,1,2,3$
כאשר $g=\sigma^n$ ברור שהתנאי מתקיים. כאשר $g=\tau\sigma^n$ מקבלים ש-
$gkg^{-1}=(\tau\sigma^n)\sigma^2(\tau\sigma^n)^{-1}=\tau\sigma^n\sigma^2\sigma^{-n}\tau^{-1}=\tau\sigma^2\tau=\sigma^2\in K$ ולכן התנאי מתקיים ו- K נורמלית ב- G.

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן הומומורפיזמים ומצאו אם הן חח"ע ו/או על:
א) $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(\mathbb{C}^*,\cdot)$ המוגדרת ע"י: $f(x)=x^5$
ב) $f:(\mathbb{Q}^*,\cdot)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ המוגדרת ע"י: $f(x)=x^5$
ג) $f:\mathbb{Z}_6\to G$ באשר $G=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ והפונקציה מוגדרת ע"י $x\to\begin{pmatrix}1&0&x\ (\mathrm{mod}\ 3)\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

<u>פתרון</u>

הבדיקה שהפונקציות בכל אחד מהסעיפים הן הומומורפיזמים היא פשוטה. בנוגע לחח"ע/על:
(א) לא חח"ע, כן על. (ב) כן חח"ע, לא על. (ג) לא חח"ע, לא על.

<u>שאלה 6</u>

בתרגיל בית הקודם, הוכחתם כי $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in R, a^2+b^2>0\right\}$ חבורה. הוכיחו כי $G\cong\mathbb{C}^*$.

<u>פתרון</u>

נבנה איזומורפיזם מפורש בין שתי החבורות. נגדיר $\varphi: G\to\mathbb{C}^*$ ע"י $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\to a+bi$.

ברור שזו פונקציה חח"ע ועל, נשאר רק להראות כי זהו הומומורפיזם: יהיו $M_1=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, צ"ל כי $\varphi(M_1M_2)=\varphi(M_1)\varphi(M_2)$. אכן, מצד אחד $\varphi(M_1)\varphi(M_2)=(a+bi)(c+di)=ac-bd+i(ad+bc)$ ומצד שני,

$$\varphi(M_1M_2)=\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix})=\varphi(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix})=ac-bd+i(ad+bc)$$

כדרוש.

<u>שאלה 7</u>

תהיינה $A,B\le G$ תת חבורות. הוכיחו:

א. $[A:A\cap B]\le[G:B]$. הדרכה: הגדירו $f:A\to\{aB:a\in A\}$ על.

ב. הסיקו ש- $[G:A\cap B]\le[G:A]\cdot[G:B]$.

ג. $[A:A\cap B]=[G:B]$ אם ורק אם $G=AB$.

ד. אם $[G:A],[G:B]$ זרים, אז $[G:A\cap B]=[G:A]\cdot[G:B]$.

<u>פתרון</u>

א. נוכיח שהפונקציה $f:\{a(A\cap B):a\in A\}\to\{gB:g\in G\}$ המוגדרת ע"י $f(a(A\cap B))=aB$ חח"ע ומכאן נקבל ש $[A:A\cap B]=\left|\{a(A\cap B):a\in A\}\right|\le\{gB:g\in G\}=[G:B]$. עבור $a_1,a_2\in A$ מתקיים $a_1(A\cap B)=a_2(A\cap B)$ אם"ם $a_1^{-1}a_2\in A\cap B$ וזה קורה אם"ם $a_1^{-1}a_2\in B$ (שכן כבר נתון $a_1,a_2\in A$ וכן $A\le G$). לבסוף התנאי האחרון מתקיים אם"ם $a_1B=a_2B$. זה מוכיח שהפונקציה מוגדרת היטב וכן חח"ע כדרוש.

ב. עפ"י שאלה 6 תרגיל 3 (גרסת האתגר) מכיון שמתקיים $A\cap B\le A\le G$ וכן $[G:A\cap B]$ סופי נקבל ש $[G:A\cap B]=[G:A]\cdot[A:A\cap B]$. מסעיף א' מתקיים $[A:A\cap B]\le[G:B]$ ולכן $[G:A\cap B]=[G:A]\cdot[A:A\cap B]\le[G:A]\cdot[G:B]$ כדרוש.

ג. $\Rightarrow$ מ"ל שאם $G=AB$ אזי הפונקציה מסעיף א' היא על (למה?). יהי $g\in G$ צ"ל שקיים $a\in A$ כך ש $gB=aB$. $G=AB$ ולכן קיימים $a\in A,b\in B$ כך ש $g=ab$. מכיון ש $b\in B$ וכן $B\le G$ נקבל ש $gB=(ab)B=a(bB)=aB$.

$\Leftarrow$ מסעיף א' קיימת פונקציה חח"ע מהקבוצה הסופית $\{a(A\cap B):a\in A\}$ לקבוצה הסופית $\{gB:g\in G\}$ (הסופיות נובעת מההנחה שכל האינדקסים סופיים. כעת מהנתון בסעיף ג' נובע ששתי הקבוצות הנ"ל הן שוות עוצמה. ידוע מבדידה שפונקציה חח"ע מקבוצה סופית לקבוצה סופית שוות עוצמה היא בהכרח על. לכן לכל $g\in G$ בהכרח קיים $a\in A$ כך ש $gB=aB$. כעת, $g=g\cdot e_G\in gB=aB$ ומכאן קיים $b\in B$ כך ש $g=ab$. לכן לכל $g\in G$ מתקיים $g\in AB$ וזה אומר ש $G\subseteq AB$. ברור שמתקיים $AB\subseteq G$ ולכן $G=AB$.

ד. כפי שציינו בהוכחת סעיף ב' $[G:A\cap B]=[G:A]\cdot[A:A\cap B]$ ובאופן דומה ניתן להראות ש $[G:A\cap B]=[G:B]\cdot[B:A\cap B]$. לכן $[G:A],[G:B]|[G:A\cap B]$. מכיון ש$[G:A],[G:B]$ זרים מתקיים $[G:A]\cdot[G:B]|[G:A\cap B]$ ובפרט $[G:A]\cdot[G:B]\le[G:A\cap B]$. מצד שני עפ"י סעיף ב' $[G:A\cap B]\le[G:A]\cdot[G:B]$ ולכן בסה"כ $[G:A\cap B]=[G:A]\cdot[G:B]$.

<u>**שאלת בונוס**</u> (10 נק')
הגדרה: חבורה G היא פשוטה אם אין לה ת"ח נורמליות לא-טריוואליות.
נתון כי $G_1\subseteq G_2\subseteq G_3\subseteq ....$ חבורות פשוטות. הוכיחו כי $G=\bigcup_n G_n$ חבורה פשוטה.

<u>**פתרון**</u>

(ראשית, $G=\bigcup_n G_n$ חבורה: נבדוק למשל סגירות. יהיו $a,b\in G$. $a\in G$ לכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $a\in G_n$. כמו כן $b\in G$ לכן קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $b\in G_m$. עבור $s=\max(n,m)$ נקבל כי $a,b\in G_s$, וכיוון ש- G_s חבורה מתקיימת בה סגירות כלומר $ab\in G_s$ לכן $ab\in G$.
באופן דומה מוכיחים את שאר התכונות של חבורה.)

כעת לשאלה עצמה: צריך להראות כי G פשוטה כלומר שאין לה ת"ח נורמליות לא טריוואליות. תהי $N\triangleleft G$, נראה כי N טריוואלית. ראשית, מתקיים $N\cap G_n\triangleleft G_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ (לפי כך שאם G חבורה, H ת"ח של G, ו-N ת"ח נורמלית של G, אז $N\cap H$

ת"ח נורמלית של H). כיוון ש- G_n פשוטות, עבור כל n האופציות היחידות הן $N \cap G_n = \{e\}$ או $N \cap G_n = G_n$.

נחלק ל-2 מקרים:

1) קיים $i \in \mathbb{N}$ עבורו $N \cap G_i = G_i$. נבחר את i להיות המינימאלי המקיים זאת. כלומר לכל $k < i$ מתקיים $N \cap G_i = \{e\}$, ולכל $k \geq i$ מתקיים $N \leq G_k$ (הסבר: $N \cap G_i = G_i$ לכן $N \leq G_i$. כמו כן $G_i \leq G_k$ לכל $k > i$ ולכן $N \leq G_k$). אז קיבלנו:

$$N = N \cap G = N \cap (\bigcup_n G_n) = \bigcup_n (N \cap G_n) = (\bigcup_{k=1}^{i-1} N \cap G_k) \cup (\bigcup_{k=i}^{\infty} N \cap G_k) = \{e\} \cup \bigcup_{k=i}^{\infty} G_k = \bigcup_{k=i}^{\infty} G_k = G$$

כלומר $N = G$ היא טריוואלית.

2) לא קיים $i \in \mathbb{N}$ עבורו $N \cap G_i = G_i$, כלומר $N \cap G_i = \{e\}$ לכל $i \in \mathbb{N}$. אבל אז $N = N \cap G = N \cap (\bigcup_n G_n) = \bigcup_n (N \cap G_n) = \bigcup_n \{e\} = \{e\}$ כלומר $N = \{e\}$ היא טריוואלית.