מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 3 (פתרון)

1. נסמן ב- σ^k את הסדרה $\left(1,\frac{1}{2},\dots\frac{1}{k},0,0,\dots\right)$ -כל האיברים חוץ מ-**k** הראשונים אפסיים. נסמן ב- s את הסדרה $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\frac{1}{n},\dots\right)$
(זאת אומרת, $s_n=\frac{1}{n}$) .

אז $d(\sigma^k,s)=\sup(0,\dots,0,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\dots))=\frac{1}{k}$, ($k-1$ אפסים לפני $\frac{1}{k}$).

אזי $d(\sigma^k,s)=\frac{1}{k}\to 0$ כאשר $k\to\infty$ ולכן $\sigma^k\to s$. אבל $\sigma^k\in F, s\notin F$ לפי הגדרתם. $\Leftarrow$ F לא סגורה .

.

2. במרחב מטרי שלם כל סדרת קושי מתכנסת (לפי ההגדרה). לכן במרחב קיימת נקודה x כך ש- $x_n\to x$. תהי U סביבה פתוחה של x . אזי קיים מספר טבעי n_0 כך שכל האיברים x_n שמספרם $n\le n_0$ מוכלים ב-U . אבל כל האיברים x_n שונים ולכן הקבוצה $\{x_n \mid n\ge n_0\}\subseteq U$ אינסופית וזה מוכיח ש- x היא נקודת הצטברות של A.

3. נגדיר $A=A_1\cup A_2\cup A_3$ כאשר:

$$A_1=\{1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{3},\dots,1+\frac{1}{n},\dots\}$$

$$A_2=\{2+\frac{1}{2},2+\frac{1}{3},\dots,2+\frac{1}{n},\dots\}$$

$$A_3=\{3+\frac{1}{2},3+\frac{1}{3},\dots,3+\frac{1}{n},\dots\}$$

3.1. נוכיח שלכל $i=1,2,3$, i היא נקודת הצטברות של A ב-$\mathbb{R}$.
להוכחה נתבונן באיברים של A_i כמו איברים של הסדרה $\left(i+\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
ברור ש-
(א) $\frac{1}{n+1}\to 0$ כאשר $n\to\infty$ ולכן: $\lim_{n\to\infty} i+\frac{1}{n+1}=i$.
(ב) כל האיברים של A שונים.

זה אומר שלכל $\varepsilon > 0$ ולכל $i = 1,2,3$ הכדור $B(i,\varepsilon)$ מכיל קבוצה אינסופית של איברים מ- $A_i \subseteq A$ ולכן i היא נקודת הצטברות של A.

3.2. נוכיח שב-$\mathbb{R}$ אין נקודות הצטברות אחרות של A.
<u>הוכחה</u>. אם $x \neq 1,2,3$ אז $r = min\{|x-1|,|x-2|,|x-3|\} > 0$.
מ- (א) נובע ש- $B(i,\frac{r}{2})$ מכיל את כל הנקודות של A_i למעט קבוצה סופית $A_i \cap B\left(i,\frac{r}{2}\right)^c$. מאי-שוויון המשולש: $B\left(i,\frac{r}{2}\right) \cap B\left(x,\frac{r}{2}\right) = \emptyset$ לכל $i = 1,2,3$ (לפי ההגדרה של r) ולכן $B(x,\frac{r}{2}) \subseteq B\left(i,\frac{r}{2}\right)^c$. אזי הכדור $B(x,\frac{r}{2})$ מכיל לא יותר ממספר סופי של נקודות מכל קבוצה A_i. לכן $B(x,\frac{r}{2})$ מכיל לא יותר ממספר סופי של נקודות מ- $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. אז x היא לא נקודת הצטברות של A.

4. <u>א'</u> לא, כי לכל נקודה $x \in M$ הכדור $B(x,\frac{1}{2})$ מכיל רק נקודה אחת – את x עצמה ולכן היא לא נקודות הצטברות.
<u>ב'.</u> כל נקודה $x \in \mathbb{R}$ היא נקודת הצטברות.
<u>הוכחה</u>. יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים n כך ש- $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. לכן לפחות שתי נקודות מסוג $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$, שייכות ל- $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, <u>כי אחרת:</u>
אם אין נקודות כאלה אז קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\frac{k}{2^n} \leq x-\varepsilon < x+\varepsilon \leq \frac{k+1}{2^n}$
ו- $\frac{1}{2^n} \geq 2\varepsilon$, <u>סתירה</u>,
ואם ישנה רק נקודה כזאת אחת, $\frac{m}{2^n}$, אז $\frac{m-1}{2^n} \leq x-\varepsilon < x+\varepsilon \leq \frac{m+1}{2^n}$
ו- $\frac{2}{2^n} \geq 2\varepsilon$, <u>גם סתירה</u>.
אבל אחת משתי הנקודות שונה מ-x ו- $\frac{k}{2^n} \in \mathbb{Q}$. לכן x היא נקודת הצטברות של $\mathbb{Q}$ לפי ההגדרה.

5. <u>א'</u> יהי $a \in M$ ו- $x_n \to a$ כאשר $x_n \in A'$. נוכיח ש- $a \in A'$.

תהי U סביבה פתוחה של a. אזי U מכילה נקודות מ-$\{x_n\} \subseteq A'$. אם נקח אחת מהן $b = x_{n_0}$ אז U היא גם סביבה פתוחה של b ולכן מכילה קבוצה אינסופית נקודות של A. אז $a \in A'$, מצ"ל.

<u>ב'</u> נוכיח ש- $(A' \cup A)^c$ פתוחה. יהי $x \in (A' \cup A)^c$. נניח (בשלילה) שלא קיימת סביבה פתוחה של x המוכלת ב- $(A' \cup A)^c$.

נבנה באופן <u>אינדוקטיבי</u> סדרה $x_n \in A$ וסדרת כדרים $B(x,r_n)$ כך ש-

i. $r_n \le \frac{1}{n}$
ii. $x_n \in B(x,r_n)$
iii. $x_n \notin \{x_1, \dots . x_{n-1}\}$ אם $n > 1$.

<u>בסיס האינדוקציה.</u> אם נגדיר $r_1 = 1$ אז קיים $y \in B(x,r_1) \cap (A' \cup A)$ לפי ההנחה . אם $y \in A$ אז נגדיר $x_1 = y$. אם $y \in A' - A$ אז קיים קיים $x_1 \in B(x,1) \cap A$ כי y נקודת הצטברות של A.

<u>צעד האינדוקציה.</u> נניח בנינו : $x_1, \dots x_n$ ו- $B(x,r_1), \dots, B(x,r_n)$ כך שמתקימים התנאים i, ii, iii. אם נגדיר $r_n = \min\{\frac{1}{n+1}, d(x_1,x), \dots, d(x_n,x)\}$ אז קיים $y \in B(x,r_{n+1}) \cap (A' \cup A)$ לפי ההנחה . אם $y \in A$ אז נגדיר $x_{n+1} = y$.
אם $y \in A' - A$ אז קיים קיים $x_{n+1} \in B(x,r_{n+1}) \cap A$ כי y נקודת הצטברות של A וזה מקיים את (ii). התנאים (iii) ו- (i) מתקימים לפי הגדרת r_n .

מהבניה ברור ש- $x_n \in A$ שונות ו- $x_n \to x$. לכן $x \in A'$ ⇐ <u>סתירה</u> לתנאי $x \in (A' \cup A)^c$.

<u>ג' .⇐</u> $A' \subseteq A$ ⇐ $A = A' \cup A$ סגורה לפי ב'.

<u>.⇒</u> $b \in A'$⇐ קיימת סדרה $x_n \in A$ כך ש- $x_n \to b$ ומכיוון ש- A קבוצה סגורה, אז $b \in A$, מצ"ל.

6. <u>א'</u> נוכח קודם ש-A' חסומה. לפל התנאי A חסומה ולכן קיימים $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ כך ש- $A \subseteq B(x_0,R)$. לפי הגדרת נקודות ההצטברות לכל $b \in A'$ קיימת נקודה $a_b \in B(b,R) \cap A$. אז לכל $b \in A'$: $2R > d(x_0,a_b) + d(a_b,b) \ge d(x_0,b)$
⇐ A' חסומה.
כמו שהוכח בתרגיל 5 א', A' גם סגורה ולכן לפי המשפט היינה – בורל,
A' - תת-מרחב קומפקטי של $\mathbb{R}^n$.

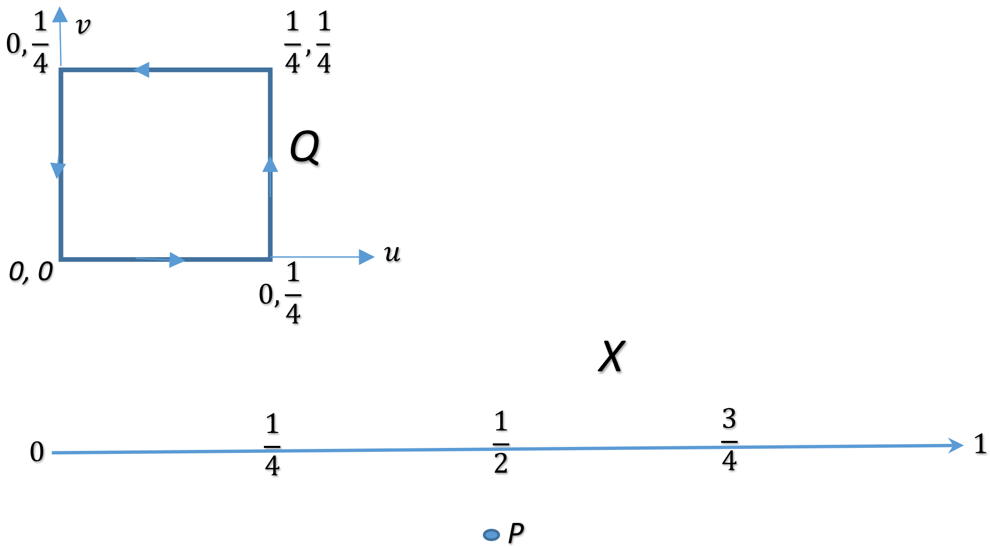
ב' תהי $A = (0,1) \cup \mathbb{Z}$. ברור ש-$A$ לא חסומה כי $\mathbb{Z}$ לא חסומה.
כל הנקודות מ-$[0,1]$ הן נקודות ההצטברות של A וכל נקודה b שלא שייכת ל-$[0,1]$ יכולה להיות <u>מופרדת</u> מ-$[0,1]$ על ידי כדור פתוח $B(b,r)$
כאשר $r = \{\frac{1}{2}, |b|, |1-b|\}$. ולכן b לא נקודת הצטברות של A כי בכדור הזה מוכלת לא יותר מנקודה אחת מ- $\mathbb{Z}$ ובכלל אין נקודות מ-$[0,1]$. אז הוחכנו ש- $A' = [0,1]$.
לפי המשפט הַיינה -בורל A' קומפקטי.

7. <u>תזכורת:</u> תת-קבוצה $V \subseteq A$ פתוחה בתת-מרחב A א"א קיימת תת-קבוצה $U \subseteq M$ פתוחה ב-M כך ש- $V = U \cap M$.
<u>הוכחת טענת התרגיל.</u> אם $A = \emptyset$ או $A = M$ אזי הכול הוכח. אם לא - אז:
יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח של המרחב המטרי A (הקבוצות V_α פתוחות <u>ביחס ל-A</u>) .
אזי לכל $\alpha \in \Lambda$ קיימת קבוצה U_α פתוחה ב-M כך ש-$V_\alpha = U_\alpha \cap A$.
לכן $A = \cup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha = \cup_{\alpha\in\Lambda}(U_\alpha \cap A) = (\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) \cap A \Leftarrow A \subseteq \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \Leftarrow$
$M = \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \cup A^c$ ולכן $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{A^c\}$ כיסוי פתוח של M. מקומפקטיות של M נובע שקיים תת-כיסוי סופי $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}, A^c\}$ של M,
ז"א: $M = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup A^c \Leftarrow A \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \Leftarrow A = V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$.
ואנחנו מצאנו תת-כיסוי סופי בכיסוי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ של תת-הרחב A.

8. א' כל כיסוי פתוח במטריקה אחת הוא גם כיסוי פתוח במטריקה השניה ולהפך, כי שתי המטריקות שקולות. לכן שני המרחבים קומפקטיים או לא קומפקטיים בו-זמנית לפי הגדרת הקומפקטיות.

ב' המטריקה המושרת ל- M היא אותה המטריקה והיא יוצרת אותו אוסף של קבוצות פתוחת בתת-מרחב M. הקומפקטיות של המרחב תלויה רק בואסף של קבוצות הפתוחות. לכן M קומפקטי כתת-מרחב של (M_1, ρ_1) אם ורק אם הוא קומפקטי כתת-מרחב של (M_2, ρ_2).

<u>ג'</u> נתבונן בריבוע $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ עם אורך צלע $\frac{1}{4}$ והקודקודים $(0,0), \left(0, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right)$.
באופן לא פורמלי אפשר להפוך Q ל-X (ראה בציור):
- להטאים את $(0,0)$ ל-P ,
- "לישר" את הקו השבור $Q - \{(0,0)\}$ ולהטאים אותו ל-X כך ש-:
  - הצלה התכתון הופך ל -$\left(0, \frac{1}{4}\right)$
  - צלה הימין הופך ל - $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$
  - הצלה העליון הופך ל - $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$
  - צלה השמאל הופך ל -$\left(\frac{3}{4}, 1\right)$



<u>באופן פורמלי</u> ההטאמה ממומשת על ידי פונקציה $f: Q \to X$ כך ש-:

$$f(u,v)=\begin{cases} P, & u=v=0 \\ u. & u>0, v=0 \\ v+\frac{1}{4}, & u=\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}-u, & v=\frac{1}{4} \\ 1-v. & u=0, v>0 \end{cases}$$

(u,v - קואורדינטות ב-$\mathbb{R}^2$)

קל לבדוק שהפונקציה f חח"ע ועל. **(*)**

נקח שתי נקודות $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in Q$. תמיד ישנם שני קוים שבורים מאחת לשניה לאורך הצלעות של הריבוע.

הקו אחד עובר דרך $(0,0)$ והשני דרך $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$. נסמן את האורך של הקצר בין הקוים ב- $\boldsymbol{\rho((u_1,v_1),(u_2,v_2))}$.

קל לבדוק בעזרת הציור שמתקיים: $\rho((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = |u_1-u_2| + |v_1-v_2|$.

הבדיקה הישרה מראה גם ש-: $\boldsymbol{d(f(q),f(s)) = \rho(q,s)}$ **לכל** $\boldsymbol{q,s \in Q}$. **(**)**

אם להשתמש בנוסחה הזאת <u>לכל שתי נקודות ב-$\mathbb{R}^2$</u> אז רואים ש- ρ צימצום של המטרקה ב- $\mathbb{R}^2$ שניתנת על ידי הנוסחה:

$$\mathrm{P}((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = |u_1-u_2| + |v_1-v_2| \; .$$

חוץ מהעובדה ש-P מטריקה, חשוב בשבילינו שהיא שקולה למטריקה אוקלידית. (שני הדברים האלה ידועים אבל אפשר לראות את הוכחתם <u>בתוספת</u>)

(1)נוכיח ש-d מטריקה. יהי $x,y.z \in X$.פונקצית עללכן קיימים $q,s,t \in Q$

כך ש- $f(q)=x, f(s)=y, f(t)=z$. אזי לפי התחונות (*) ו-(**) של f:

$$d(x.y) = d\big(f(q),f(s)\big) = 0 \Leftrightarrow \rho(q,s) = 0 \Leftrightarrow q = s \Leftrightarrow x = f(q) = f(s) = y$$

(אקסיומה 1)

$$d(x.y) = d\big(f(q),f(s)\big) = \rho(q,s) = \rho(s,q) = d\big(f(s),f(q)\big) = d(y.x)$$

(אקסיומה 2)

$$d(x.z) = d\big(f(q),f(t)\big) = \rho(q,t) \le \rho(q,s) + \rho(s,t) =$$

$$d\big(f(q),f(s)\big) + d\big(f(s).f(t)\big) = d(x,y) + d(y,z)$$ (אקסיומה 3)

(2) קומפקטיות. נסמן מטריקה אוקלידית ב-D . הקבוצה Q סגורה וחסומה ב-$(\mathbb{R}^2,D)$ ולכן תת-מרחב (Q,D) קומפקטי לפי המשפט היינה –בורל. מתרגיל א' מקבלים ש-(Q,ρ) גם קומפקטי.

תהי $x_n \in X$ סדרה.מ-(*) ו-(**) נובע ש-f הפיכה. נתבונן בסדרה $f^{-1}(x_n) \in Q$. (Q,ρ) קומפקטי ולכן קיימת תת-סדרה $f^{-1}(x_{n_i})$ המתכנסת ל-$q \in Q$. אזי לפי התחונות (*) ו-(**) של f:

$\rho\left(q,f^{-1}(x_{n_i})\right) \to 0 \Leftarrow d\big(f(q),x_{n_i}\big) \to 0 \Leftarrow x_{n_i} \to f(q) \Leftarrow$ מצאנו תת-סדרה מתכנסת בסדר x_n . אזי X קומפקטי.

<u>תוספת.</u>

<u>P - מטריקה</u> אי-שליליות ושתי האקסיומות הראשונות נובעות ישירות מהנוסחה ואי-שויון המשולש נובע באופן טריוויאלי מאי-שויון המשולש לערך המוחלט.

<u>שקילות P למטריקה אוקלידית D</u>. בחישוב הישר אפשר לבדוק:

$$\frac{(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|)^2}{2} \le |u_1-u_2|^2 + |v_1-v_2|^2 \le (|u_1-u_2|+|v_1-v_2|)^2$$

אזי בצורה אחרת, לכל $a,b \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\mathrm{P}(a,b)}{\sqrt{2}} \le D(a,b) \le \mathrm{P}(a,b)$ כאשר D מטריקה אוקלידית. בצורת הכדורים העובדה הזות גוררת: $B_{\mathrm{P}}\left(a,\frac{R}{\sqrt{2}}\right) \subseteq B(a,R) \subseteq B_{\mathrm{P}}(a,R)$.

זה מוכיח שנקודה $a \in \mathbb{R}^2$ מוכלת בתת-קבוצה יחד עם כדור מסוים $B(a,R_1)$ אם ורק אם היא מוכלת באותה תת-קבוצה יחד עם כדור מסוים $B_{\mathrm{P}}(a,R_2)$. לכן תת-קבוצה פתוחה ביחס ל-D אם ורק אם היא פתוחה ביחס ל-P ,
זאת אומרת, שתי המטריקות שקולות.