

113-88-תרגיל 6-פיתרון:

*פ"א פולינום אופייני, פ"מ פולינום מינימלי

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

האם היא ניתנת לשילוש? אם כן מצא את המשולשית לה היא דומה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

2. הוכח שכל מט' אידמפוטנטית דומה למט' אלכסונית.

$$A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = A(A - I) = 0 \Rightarrow f_A = x^a(x-1)^b : M_A = x(x-1)$$

לכן A לכסינה

ע"מ 93, 5.16:

$$A \in Mat_n(F)$$

$$M_A(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

הוכח שהבאים שקולים:

א. A רגולרית ב. 0 איננו ע"ע של A ג. $a_0 \neq 0$

פיתרון:

א ← ב: הוכחנו

ב ← ג: נניח $a_0 = 0$ אזי $M_A(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i = a_m x^m + \dots + a_1 x^1 = x(a_m x^{m-1} + \dots + a_1)$

כלומר 0 שורש של הפ"מ לכן 0 שורש של הפ"א בסתירה לנתון. אזי $a_0 \neq 0$

ג ← א: נניח בשלילה ש A סינגולארית אזי 0 ע"ע של A אזי 0 שורש של הפ"א ולכן של הפ"מ, אזי הפ"מ הוא מהצורה: $P_i(x) \in F[x], M_A(x) = xP_i(x)$, ולכן אין בו חזקת 0 של x בסתירה לנתון. אזי A רגולרית

ע"מ 94, 5.22:

$$A \in Mat_n(F) \text{ מטריצה אידמפוטנטית } (A^2 = A)$$

מצא את הע"ע של A, הראה שהפ"א מתפרק לגורמים לנאריים, מצא פ"מ של A, ותאר את $\text{tr}(A)$

פיתרון:

ע"מ למצוא ע"ע נבדוק איפה הפ"א מתאפס, לכן:

$$0 = |xI - A| = |xI - A^2|$$

מצד שני הוכחנו:

$$0 = |x^2 I - A^2|$$

לכן, לכל x ע"ע :

$$x^2 = x$$

⇓

$$x^2 - x = x(x-1) = 0$$

⇓

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$f_A(x) = x^\alpha (x-1)^\beta$$

$$M_A(x) = x(x-1)$$

$$tr(A) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \beta$$

ע"מ 93, 5.14:

השתמש בפ"א כדי למצוא פ"מ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

פיתרון:

$$f_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \Rightarrow x_1 = 1, x_{2,3} = 2, x_{4,5} = 3$$

$$M_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2 \text{ בחישוב:}$$

ע"מ 93, 5.15:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מצא M_A^{-1} ובעזרתו

(רמז: זיכרו מה קורה ל M_A כאשר נציב בו את A ובודדו משם את I)

פיתרון:

$$f_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

לכן האפשרויות לפ"מ הן: $(x-1)^2(x-2), (x-1)(x-2)$
 נבדוק את הדרגה הנמוכה ראשית:

$$(A - I)(A - 2I) = 0$$

↓

$$M_A(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

נחפש את ההפוכה ל A . ידוע ש A מתאפסת על הפ"מ שלה, אזי:

$$M_A(A) = 0$$

↓

$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

↓

$$A^2 - 3A = -2I$$

↓

$$A(A - 3I) = -2I$$

↓

$$A \left[-\frac{1}{2}(A - 3I) \right] = I$$

↓

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ע"מ 92, 5.12:

$$A \in Mat_n(F)$$

$$M_A(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

הוכח שהמטריצה $f(A)$ הפיכה

(רמז: השתמש בעובדה ש A מתאפסת על הפ"מ שלה ע"מ לפשט את $f(A)$ וזכור שמט' הפיכה עם הדט' שלה שונה מאפס)

פיתרון:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = M_A(x) + 6x + 2$$

↓

$$f(A) = M_A(A) + 6A + 2I = 6A + 2I$$

נניח בשלילה ש A לא הפיכה, אזי:

$$0 = |f(A)| = |6A + 2I| = 6^n \left| A + \frac{1}{3}I \right|$$

↓

$$0 = \left| A + \frac{1}{3}I \right|$$

↓

היננו שורש של הפ"א בסתירה לכך שאיננו שורש של הפ"מ.
אזי A הפיכה.

ע"מ 92, 5.10:

$$A \in \text{Mat}_n(F)$$

הוכח: $f_A(x) \mid m_A^n(x)$

ראו קובץ של דר' צבאן באתר

ע"מ 91, 5.5:

מצא פ"מ עבור המט' הבאות לפי האלגוריתם למציאתו (משעור קודם), כלומר, לא ע"י הפ"א.

$$\text{א. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

(זיכרו, הפולינום המתוקן המתאים לכל פולינום במאפס גם שייך למאפס)
פיתרון:
א.

$$M_A(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$M_A(A) = a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0$$

$$a_2 \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

↓

$$\begin{cases} a_2 \cdot 7 + a_1 + a_0 = 0 \\ a_2 \cdot 10 + a_1 \cdot 2 = 0 \\ a_2 \cdot 15 + a_1 \cdot 3 = 0 \\ a_2 \cdot 22 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -5a_2, \quad a_0 = -2a_2$$

↓

$$f \in N_A, f(x) = a_2x^2 - 5a_2x - 2a_2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 5x - 2 = \left(x - \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$M_A(x) = x^2 - 5x - 2$$

ב.

$$M_A(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$M_A(A) = a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0$$

$$a_2 \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

⇓

$$\begin{cases} a_2 \cdot a^2 + a_1 \cdot a + a_0 = 0 \\ 2a_2 \cdot ab + a_1 \cdot b = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -2a_2a, \quad a_0 = a_2a^2$$

⇓

$$f \in N_A, f(x) = a_2x^2 - 2a_2ax + a_2a^2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 \Rightarrow$$

$$M_A(x) = (x-a)^2 \quad \text{או} \quad (x-a)$$

$$A - aI \neq 0 \Rightarrow M_A(x) = (x-a)^2$$

ע"מ 91, 5.4:

- א. הוכח שלמטריצות B, A דומות אותו פ"מ
ב. הוכח שאם A או B הפיכות אז הפ"מ של AB ושל BA זהים

פיתרון:

א.

$$A \approx B \Rightarrow \exists P: A = PBP^{-1}$$

⇓

$$0 = M_A(A) = M_A(PBP^{-1}) = PM_A(B)P^{-1} \Rightarrow 0 = M_A(B) \Rightarrow M_A \in N_B$$

$$(0 = M_B(B) = M_B(P^{-1}AP) = P^{-1}M_B(A)P \Rightarrow 0 = M_B(A) \Rightarrow M_B \in N_A, \text{ ובהתאמה})$$

לכן M_A חייב להיות מינימלי ב N_B (ובהתאמה: M_B חייב להיות מינימלי ב N_A) אחרת הוא לא יהיה מינימלי ב N_A (ובהתאמה: תיפגע מינימליות M_B ב N_B) ולכן $M_B = M_A$

ב. הוכחנו בעבר כי AB דומה ל BA ולכן יש להן אותו פ"מ לפי סעיף א