משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 1

משוואות דיפרנציאליות הן משוואות הקושרות נגזרות שונות של פונקציה לא ידועה. המשוואות מתחלקות לשני סוגים עיקריים:

(i) $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ משוואות דיפרנציאליות רגילות
להלן מד"ר.

(ii) $F(x, y, z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots) = 0$ משוואות דיפרנציאליות חלקיות (הנגזרות חלקיות) בקורס הבא.

פתרון המד"ר הינו פונקציה $y(x)$ כאשר x - משתנה ב"ת
y - משתנה תלוי.

דוגמא למד"ר מעולם הפיזיקה:

$$g = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

כאשר: $y(t)$ גובה בזמן t של מסה m אשר כדו"א מפעיל עליה כוח g.

<u>הערה</u>: לגבי סימני נגזרות, הסימן של ניוטון היה '·' (דוט) ז"א:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

וכיום נהוג להמשיך להשתמש בסימון זה בכל זמן שגוזרים לפי הזמן. ($y' = \frac{dy}{dx}$)

<u>הפרדת משתנים</u>

מד"ר מהצורה $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ (g,f רציפות)

ניתן לפתור באמצעות הפרדת משתנים:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Big/ \int(\cdot)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \longrightarrow$$ ומחלצים את y.

תרגילים: מצא פתרון כללי של המד"ר הבאות:

①
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2+1} \Rightarrow (y^2+1)dy = x\,dx \quad /\int(\cdot)$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{3}+y=\frac{x^2}{2}+\tilde{C} \Rightarrow \boxed{2y^3+6y=3x^2+C}$$

②
$$e^y\cdot\frac{dy}{dx}=2x \Rightarrow e^y dy = 2x\,dx \quad /\int(\cdot)$$

$$e^y = x^2+C \Rightarrow \boxed{y=\ln(x^2+C)}$$

הערה: בקורס זה, כשיש זמן, ניתן לוודא שהפתרון נכון ע"י גזירה והצבה. למשל, בדוגמא 2:

$$y'=\frac{2x}{x^2+C} \xRightarrow{\text{נציב במד"ר}} e^y\cdot\frac{2x}{x^2+C} = e^{\ln(x^2+C)}\cdot\frac{2x}{x^2+C}=2x$$

③
$$xe^{x^2}+yy'=0$$

$$y\frac{dy}{dx}=-xe^{x^2} \Rightarrow y\,dy=-xe^{x^2}dx$$

$$\frac{y^2}{2}=-\int xe^{x^2}dx+\tilde{C}$$

בשיטת ההצבה: $u=x^2$

$du=2x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}=-\frac{1}{2}\int e^u du+\tilde{C}$$

$$y^2=-e^u+C \Rightarrow \boxed{y=\pm\sqrt{-e^{x^2}+C}}$$

בעית קושי הינה מד"ר עם תנאי התחלה. נניח לדוגמא ב-3 היה תנאי $y(0)=1$ אזי נציב:

$$y=1=\pm\sqrt{-1+C} \Rightarrow 1=-1+C \Rightarrow C=2$$

ואז הפתרון היה:

$$\boxed{y=\pm\sqrt{-e^{x^2}+2}}$$

פרק 2

4. פתור $\frac{dy}{dx} = ay(1-by)$

פתרון:

$$\frac{dy}{y(1-by)} = a\,dx$$

לצורך אינטגרל באגף שמאל נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-by} = \frac{1}{y(1-by)}$$

$$\Rightarrow A(1-by) + By = 1$$

השוואת מקדמים:

$$O(y^0): \quad \boxed{A = 1}$$

$$O(y^1): \quad -bA + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = b}$$

לכן קיבלנו כעת:

$$\frac{1}{y} + \frac{b}{1-by} = a\,dx \quad / \int(\cdot)$$

$$\ln|y| - \ln|1-by| = ax + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{1-by}\right| = ax + \tilde{c}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-by} = \bar{c}\, e^{ax} \quad ; \quad \bar{c} = \pm e^{\tilde{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{1-by}{y} = c\, e^{-ax} \Rightarrow \frac{1}{y} - b = c\, e^{-ax}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{b + c\, e^{-ax}}}$$

(5.) שאלה ממבחן (מועד א' תשע"א 4 אר', פ. גרמי ש"ל)

a,b קבועים. מצא תנאי על a ו/או b כך שק"ים פתרון למשוואה:

$$y'(t)+a\,y(t)=tb$$

מהצורה $\boxed{y(t)=c_1t+c_2}$, c_1,c_2 קבועים.

<u>פתרון:</u> נגזיר $y'(t)=c_1$ ונציב במד"ר:

$$c_1+a(c_1t+c_2)=tb$$

$$c_1+ac_1t+ac_2=tb$$

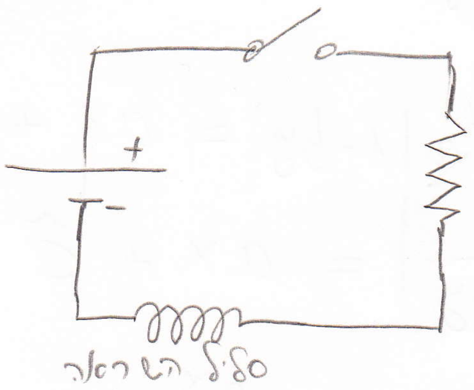
ע"פ השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} O(t^0): & c_1+ac_2=0 \Rightarrow c_2=-\frac{b}{a^2} \\ O(t^1): & ac_1=b \Rightarrow c_1=\frac{b}{a} \end{cases}$$

ולכן $\boxed{a\neq 0}$

(6.) נתון מעגל חשמלי כמתואר בציור. לפי חוק קירכהוף, הזרם במעגל, i, מקיים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$Ri+L\frac{di}{dt}=V$$



$V=50[V]$ $R=10[\Omega]$

סליל השראה

$L=3[H]$ יחידות הנרי

<u>א.</u> בהינתן שבזמן $t=0$ המעגל פתוח, מצא את הזרם במעגל בזמן t כלשהו.

<u>ב.</u> מהו הזרם החשמלי במעגל לאחר זמן רב

$$\lim_{t\to\infty} i(t)=?$$

דף 3

<u>פתרון</u>: <u>א.</u> מעגל פתוח = אין זרם ולכן $i(0)=0$ תנאי התחלה.

<u>המד"ר הינה:</u>

$$10i+3\frac{di}{dt}=50$$

$$\frac{3di}{dt}=50-10i \Rightarrow \frac{di}{50-10i}=\frac{dt}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln|50-10i|}{-10}=\frac{1}{3}t+\tilde{C}$$

$$(50-10i)=\tilde{k}e^{-\frac{10}{3}t} \quad ; \tilde{k}=\pm e^{-10\tilde{C}}$$

$$\boxed{i(t)=5-ke^{-\frac{10}{3}t}}$$

מתנאי התחלה

$$5-k=0 \Rightarrow k=5$$

$$\boxed{i(t)=5-5e^{-\frac{10}{3}t}}$$

<u>ב.</u>

$$\lim_{t\to\infty}5(1-e^{-\frac{10}{3}t})=5\,[A]$$

<u>אמפר</u>.

<u>משוואות לינאריות מסדר ראשון</u>

מד"ר מהצורה $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ נקראת

מד"ר לינארית מסדר ראשון, בצורה סטנדרטית.

- אם המד"ר מהצורה $a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)$

$\boxed{a(x)\neq 0}$ אזי נחלק ב-$a(x)$ להגיע לצורה הסטנדרטית.

- אם $Q(x)\equiv 0$ המד"ר נקראת בנוסף הומוגנית.

<u>פתרון מד"ר לינארית הומוגנית מסדר ראשון</u>

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-p(x)y \Rightarrow \boxed{y=ke^{\int -p(x)dx}}$$

ע"י הפרדת משתנים.

במקרה לא הומוגני $(Q(x) \neq 0)$ נשתמש בשיטת וריאצית המקדמים שבה מתייחסים לקבוע k כפונקציה של x.

נ"ל התהליך הוא כדלהלן: בהינתן מד"ר $y'+p(x)y=Q(x)$

I נפתור את המד"ר ההומוגני המתאימה:

$$y' + p(x)y = 0$$

ומקבלים לה פתרון הומוגני:

$$y_h = K e^{-\int p(x)dx}$$

II מחפשים פתרון פרטי למד"ר המקורי כאשר k פונק' של x נ"ל:

$$y_p = k(x) e^{-\int p(x)dx}$$

$$y_p' = k'(x) e^{-\int p(x)dx} + k(x) e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(-\int p(x)dx\right)'$$

$$= k'(x) e^{-\int p(x)dx} + k(x) e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))$$

לפי משפט "יסודי" מאינפי

נציב במד"ר את הפתרון הפרטי ונגזרתו

$$y_p' + p(x)y_p = Q(x)$$

$$k'(x) e^{-\int p(x)dx} \cancel{- p(x)k(x)e^{-\int p(x)dx}} \cancel{+ p(x)k(x)e^{-\int p(x)dx}} = Q(x)$$

$$\Rightarrow k'(x) = Q(x) e^{\int p(x)dx} \quad / \int (\cdot)$$

$$k(x) = \int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

מציבים את $k(x)$ ואת y_p ואז לסיכום:

הפתרון הכללי הוא:

$$y = y_h + y_p = \boxed{\frac{\int Q(x) e^{\int p(x)dx} + C}{e^{\int p(x)dx}}}$$

תרגיל: מצא פתרון כללי במד"ר הבא:

1

$$xy' - 2y = x^2$$

פתרון: נעביר לצורה סטנדרטית:

$$y' - \frac{2}{x}y = x \quad (*)$$

נפתור משוואה הומוגנית מתאימה

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c$$

$$y_h = k\,e^{\ln x^2} = \boxed{kx^2} \qquad k = \pm e^c$$

וריאצית מקדמים למציאת פתרון פרטי:

$$y_p = k(x)\cdot x^2$$

$$y_p' = k'(x)\cdot x^2 + k(x)\cdot 2x$$

נציב בסטנדרטית (*) לקבל:

$$k'(x)\cdot x^2 + \cancel{2x\,k(x)} - \frac{2}{\cancel{x}}\cdot \cancel{k(x)\cdot x^2} = x$$

$$\Rightarrow k'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow k(x) = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow y_p = (\ln|x| + c)\,x^2$$

$\Rightarrow$ הפתרון הכללי: $y = y_h + y_p = kx^2 + \ln|x|\cdot x^2 + cx^2$

$$\boxed{y = Ax^2 + \ln|x|\cdot x^2}$$

כאשר

$$A = k + c$$

חזרה
לחלק
הראשון
בתרגול

קבע אלו מהמשוואות הבאות ניתנות להפרדת משתנים ופתור את אלו שכן:

א.) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y+3}$ ב) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x}$

ג.) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + 1$ ד) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x+y}$

ה.) $\frac{dy}{dx} = x - y$ ו) $x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

פתרון: ד׳ וה׳ לא ניתן להפריד משתנים (אין מכפלה של x,y)

א.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y+3} \Rightarrow (y+3)dy = x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + 3y = \frac{x^2}{2} + \tilde{c} \Rightarrow \boxed{y^2 + 6y = x^2 + c}$$

ב.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{y = x + \ln|x| + c}$$

ג. אותה משוואה כמו ב׳.

ו.

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \Rightarrow y\,dy = \frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln|x| + \tilde{c} \Rightarrow y^2 = \ln x^2 + c$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\ln x^2 + c}}$$

הערה: ה׳ ניתן לפתור לאחר חלק ב׳ בתרגול)