בס"ד

פתרון מבחן מועד ב' בקורס 88133

חשבון אינפיניטסימלי 2

<u>שאלה 1.</u> היעזר בחוקי הלוגריתם ובהגדרת האינטגרל המסוים של רימן כדי לחשב את גבול הסדרה:

$$\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}.$$

פתרון: נרשום:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

קיבלנו סכום רימן של הפונקציה $f(x)=\ln(1+x)$ בקטע $[0,1]$ עם סדרת החלוקות $\{T_n\}$ כאשר כל T_n מחלקת את הקטע לקטעים שווים באורך $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ כ"א, ובחירת הנקודות: $\alpha_i=\frac{i}{n}\in[x_i,x_{i-1}]$.

הפונקציה $\ln(1+x)$ רציפה ולכן אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. מכאן שגבול סכומי הרימן כאשר $\lambda(T_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$ הוא האינטגרל המסוים המחושב עפ"י נוסחת ניוטון לייבניץ:

$$\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\int_1^2\ln x\,dx=x\ln x-x\Big|_1^2=2\ln 2-1$$

<u>שאלה 2.</u>

א. תהיינה $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$ שתי סדרות פונקציות המוגדרות בקטע I והמתכנסות במידה שווה בו. נניח כי שתי הסדרות חסומות במשותף ע"י M בקטע זה, כלומר:

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I:\left|f_n(x)\right|\le M,\left|g_n(x)\right|\le M.$$

הוכח כי גם סדרת המכפלה $\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ב- I.

ב. הראה כי שתי סדרות הפונקציות $f_n(x)=x,g_n(x)=\frac{1}{n}$ מתכנסות במידה שווה בקטע $[0,\infty)$ אך הסדרה $\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$ אינה מתכנסת במידה שווה שם. כיצד אין זה סותר את סעיף א'?

פתרון:

א. נסמן: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x),g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)$. יהא $\varepsilon>0$ כלשהו.

מתוך ההתכנסות במ"ש של כ"א מהסדרות, בפרט עבור $\frac{\varepsilon}{2M}$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש:

$$\forall n>n_0:\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2M},\left|g_n(x)-g(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

מכאן שלכל $n>n_0 , x\in I$:

$$\begin{aligned}&\left|f_n(x)\cdot g_n(x)-f(x)\cdot g(x)\right|\\&=\left|f_n(x)\cdot g_n(x)-f_n(x)\cdot g(x)+f_n(x)g(x)-f(x)g(x)\right|\\&=\left|f_n(x)\left(g_n(x)-g(x)\right)-g(x)\left(f_n(x)-f(x)\right)\right|\\&\le\left|f_n(x)\right|\cdot\left|g_n(x)-g(x)\right|+\left|g(x)\right|\cdot\left|f_n(x)-f(x)\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon\end{aligned}$$

ב. הסדרה $g_n(x)=\frac{1}{n}$ כלל לא תלויה ב- x ולכן ברור שהיא מתכנסת במ"ש לאפס בכל $\mathbb{R}$.

הסדרה $f_n(x)=x$ היא סדרה קבועה ולכן היא מתלכדת עם גבולה = x כלומר המרחק בין $f_n(x)$ לגבול הוא אפס וההתכנסות היא במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

המכפלה $\frac{x}{n}$ אמנם מתכנסת נקודתית לאפס בכל מקום אך אינה מתכנסת במ"ש ב- $[0,\infty)$.

נראה זאת עפ"י מבחן ה-limsup: $\sup\limits_{[0,\infty)}\left|\frac{x}{n}-0\right|=\sup\limits_{[0,\infty)}\frac{x}{n}=\infty\xrightarrow{n\to\infty}\infty\neq 0$.

אין זה סותר את סעיף א' שכן $f_n(x)=x$ אינה חסומה בקטע $[0,\infty)$.

<u>שאלה 3</u>. הראה כי: $\left|\arcsin x-\arcsin y\right|\ge\left|x-y\right|$: $\forall x,y\in[-1,1]$.

פתרון: אם $x=y$ שני האגפים שווים לאפס. נניח כי $x>y$. אם כן בקטע $[y,x]$ המוכל ב- $[-1,1]$ הפונקציה arcsin גזירה ולפיכך עפ"י משפט לגרנז': $\frac{\arcsin x-\arcsin y}{x-y}=\arcsin'(c)=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\ge 1$ באשר: $y<c<x$. נשים לב גם כי: $\frac{\arcsin x-\arcsin y}{x-y}=\frac{\arcsin y-\arcsin x}{y-x}\ge 1$ כלומר התוצאה נכונה גם עבור $y>x$. אם נוסיף את הערך המוחלט ונכפיל ב- $|x-y|$ נקבל את התוצאה.

<u>שאלה 4</u>. קבע עבור אילו ערכי $\alpha\ge 0$ האינטגרלים הבאים מתכנסים: $\int_1^\infty \sin\left(x^\alpha\right)dx$, $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.

פתרון:

- במקרה של: $\int_1^\infty\arctan\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)dx$ כיוון שהפונקציה היא חיובית ניעזר במבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)}{\frac{1}{x^{\alpha}}}\underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\left(1/x^{\alpha}\right)'}{1+\left(1/x^{\alpha}\right)^{2}}}{\left(1/x^{\alpha}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\left(1/x^{\alpha}\right)^{2}}=1$$

כעת כמו שהאינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ מתכנס אם"ם $\alpha>1$ כך גם שלנו ("חברים").

- במקרה של: $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ נשים לב כי ישנן כאן שתי בעיות: האחת באפס והאחת באינסוף ולכן

נפצל את האינטגרל לשניים: $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx=\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx+\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$

<u>לגבי האינטגרל הראשון</u>: עבור $\alpha\le 1$ לפונקציה יש גבול באפס והאינטגרל הוא אמיתי.

עבור $\alpha>1$ מקבלים: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}=\infty$ כלומר הוא לא אמיתי מסוג שני. הפונקציה בו בסביבה

ימנית של האפס היא חיובית ולכן נוכל להיעזר במבחן ההשוואה:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x^{\alpha}}}{\frac{1}{x^{\beta}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^{\alpha-\beta}}=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\alpha-\beta-1}}$$

הגבול הזה סופי ושונה מאפס עבור $\beta=\alpha-1$ כלומר האינטגרל שלנו "חבר" של $\int_0^{1}\frac{dx}{x^{\alpha-1}}$

ולכן מתכנס עבור: $\alpha<2 \Leftrightarrow \alpha-1<1$.

<u>לגבי האינטגרל שני</u>: זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון בו הפונקציה "מזגזגת" ולכן כאן לא ניתן

להשתמש במבחני ההשוואה. עפ"י משפט דריכלה האינטגרל מתכנס עבור $\alpha>0$.

<u>בסה"כ</u>: האינטגרל כולו מתכנס בחיתוך של ערכי ה- α, כלומר עבור: $0<\alpha<2$.

<u>שאלה 5</u>. הצג את המספרים: $e,\ln 2,\pi$ כסכום של טור מספרים רציונליים.

פתרון:

- טור מקלורן של e^x הוא: $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. כעת נותר להציב $x=1$ ולקבל: $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$.
- אפשר בטור הגיאומטרי: $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ להציב בו $x=-t$ ולקבל: $\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k$.

הקטע $[0,1]$ הוא קטע סגור בתוך תחום ההתכנסות ולכן ההתכנסות היא במ"ש בו.

מכאן שנוכל לבצע אינטגרציה איבר איבר ולקבל:

$$\ln|1+x| = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

כעת בהצבת $x=1$ נקבל: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

- אם נציב בטור הגיאומטרי $x=-t^2$ נקבל: $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}$ ומכאן:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

שוב הטור שקיבלנו מתכנס גם בנקודה $x=1$, הטור מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$ ולפיכך:

$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ כלומר: $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{2k+1}$.

<u>שאלה 6</u>. קבע היכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (x-1)^n$ מתכנס במידה שווה והיכן סכומו הוא פונקציה רציפה. נמק!

פתרון:

תחילה נחשב את רדיוס ההתכנסות עפ"י משפט דלמבר:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

כלומר כרגע ההתכנסות היא ב-$(0,2)$. נבדוק התכנסות בקצוות:

בנקודה $x=0$ מתקבל טור לייבניץ שמתכנס ואילו בנקודה $x=2$ הטור מתבדר – עפ"י מבחן ההשוואה הראשון לטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. מכאן שסכום הטור הוא פונקציה רציפה בקטע $[0,2)$ (תכונה של טור חזקות).

הטור מתכנס במידה שווה בכל $[0,b]$, $b<2$.