פתרון מבחן מועד ג' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 25/05/17

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\left(x^2\right)}-1\right)^2}{\sin(3x)\left(1-\cos(5x)\right)\ln\left(1+x\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\left(\frac{e^{(x^2)}-1}{x^2}\right)^2}_{\to 1^2}\cdot\underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{(5x)^2}{1-\cos(5x)}}_{\to 2}\cdot\underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{3\cdot 5^2}=\frac{2}{3\cdot 5^2}$$

ב. $$\lim_{x\to\infty} x\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)-\frac{\pi x}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\left\{\infty\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{(1+x)^2+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{-1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}=-\frac{1}{2}$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 2^n}{n^n}$$

$$\left(\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 2}{n}\right)^n\to\left\{\left(\frac{1^2\cdot 2}{\infty}\right)^\infty=0^\infty\right\}=0$$

2.

א. חשבו את $\int x\arctan\left(x\right)dx$.

$$\int x arctan(x)dx=\begin{Bmatrix} f'=x & g=\arctan(x)\\ f=\frac{x^2}{2} & g'=\frac{1}{1+x^2}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}x^2\arctan(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

נחשב את האינטגרל על הפונקציה הרציונאלית לא לפי האלגוריתם אלא באמצעות WIN כי זה פשוט ובולט לעין.

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\arctan(x)$$

לכן סה"כ התשובה היא

$$\int xarctan(x)dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{1}{xe^x}dx$.

מדובר בפונקציה חיובית, נעשה מבחן השוואה עם $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{xe^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{xe^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

לכן הפונקציה בשאלה קטנה באופן גבולי מהפונקציה אליה בחרנו להשוות.

אבל כיוון שהאינטגרל איתו השווינו מתכנס, גם האינטגרל שלנו מתכנס.

3. תהי f פונקציה מונוטונית עולה ממש, כלומר לכל $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x_1) < f(x_2)$.
ניח בנוסף כי f גזירה בכל $\mathbb{R}$.
א. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) \geq 0$.

יהי x_0, נתון כי f גזירה בx_0

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{>0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \geq 0$$

ב. הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) > 0$.

הפרכה: $f(x) = x^3$ היא עולה ממש בכל הממשיים, אך $f'(0) = 0$.

4. תהי פונקציה f כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f''(x) > 0$.
א. ניח בנוסף כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to(-\infty)} f(x) = \infty$. הוכיחו כי ל f יש נק' מינימום גלובאלית.

כיוון שהנגזרת השנייה חיובית, הנגזרת הראשונה עולה.

כיוון שהגבולות הם אינסוף מימין ומשמאל, מצפים שהנגזרת תהיה שלילית ואז חיובית.

ניקח נקודה כלשהי למשל $x = 0$.

קיים $x < 0$ בו $f(x) > f(0)$ ($\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$) שיפוע המיתר בין שתי הנקודות הללו על גרף הפונקציה הוא

$$\frac{f(0)-f(x)}{0-x}<0$$

באופן דומה, קיימת נקודה $x>0$ בה $f(x)>f(0)$ ($\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$), ושיפוע המיתר הוא

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$$

לפי לגראנז' קיימות נקודות בהן הנגזרת שלילית וחיובית

סה"כ הנגזרת עולה, מתישהו היא שלילית, לאחר מכן היא חיובית ולכן לפי ערך הביניים היא מתאפסת בנקודה כלשהי c.

בתחום $(-\infty,c]$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת.

בתחום $[c,\infty)$ הנגזרת חיובית ולכן הפונקציה עולה.

סה"כ $f(c)$ הוא הערך הנמוך ביותר של הפונקציה, כלומר $x=c$ היא נקודת מינימום גלובלית.

ב. הוכיחו/הפריכו: ל f יש נק' מינימום גלובאלית, גם בלי הנתון הנוסף בסעיף א'.

הפרכה: $f(x)=e^x$ מקיימת כי $f''>0$ אך אין לה נקודת מינימום גלובאלית, כיוון שהיא תמיד עולה ממש, לכל נקודה יש נקודה נמוכה ממנה, משמאל.

תוספת:

נוכיח שאם f רציפה בכל $\mathbb{R}$ וכמו כן $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ אזי לפונקציה יש מינימום גלובאלי.

נציב נקודה כלשהי, למשל $x=0$ ונסמן את הגובה בה ב$f(0)=y_0$

קיים $M_1>0$ כך שלכל $x>M_1$ מתקיים כי $f(x)>y_0$

קיים $M_2>0$ כך שלכל $x<-M_2$ מתקיים כי $f(x)>y_0$

בקטע $[-M_2,M_1]$ הפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן לפי ויירשטראס מקבלת מינימום בנקודה כלשהי x_1

כיוון ש $-M_2<0<M_1$ וכיוון ש$f(0)=y_0$ אזי $f(x_1)\le y_0$

למעשה, x_1 היא מינימום גלובאלי, הרי לכל $x\in[-M_2,M_1]$ מתקיים כי $f(x)\ge f(x_1)$

ומחוץ לקטע $f(x)>y_0\ge f(x_1)$.

5. תהי סדרה a_n המקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n^2$, ונתון כי $a_1>a_2$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית יורדת.

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-a_n^2\le 0$$

לכן הסדרה יורדת החל מ$a_3<a_2$ והלאה

אבל גם בזוג הראשון יש ירידה לפי הנתון.

ב. נניח כי $a_2=0$ חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

<u>אם</u> הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי כיוון שהיא יורדת, נסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+2} = \lim a_{n+1} - a_n^2$$

ולכן

$$L = L - L^2$$

ולכן

$$L = 0$$

נתון כי $a_2 = 0$ וכן $a_1 > a_2 = 0$

$$a_3 = a_2 - a_1^2 = -a_1^2 < 0$$

כיוון שהסדרה יורדת, $L \leq a_3 < 0$ בסתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה, וכיוון שהיא יורדת אזי $a_n \to -\infty$.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(\pi\frac{k}{n}\right)$$

מדובר בסדרת סכומי רימן של $\cos(\pi x)$ הרציפה בקטע $[0,1]$ עם בחירת הנקודות $\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n}{n}\right\}$ ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל

$$a_n \to \int_0^1 \cos(\pi x)\,dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = 0$$

הערה:

קל להבין מדוע מותר להכניס את $\frac{1}{n}$ לסכום כאשר רושמים את הסכום בצורה של שלוש נקודות:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

ב. תהי f גזירה שלוש פעמים בסביבה של 0, המקיימת $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ וכמו כן $f'''(x)>0$ בסביבה של 0. הוכיחו של f __אין__ מינימום מקומי ב $x=0$.

יהי x כלשהו בסביבה של אפס בה מתקיימות כל התכונות היפות.

נקרב את $f(x)$ בעזרת פולינום טיילור מסדר 2 של הפונקציה f סביב הנקודה המצוייה $x_0=0$

$$f(x)\approx P_2(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2}(x-0)^2=0$$

$$R_2=f(x)-P_2(x)=f(x)-0=f(x)$$

$$R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}(x-0)^3$$

מהנתון נובע כי $f'''(c)>0$ ולכן אם $x>0$ אז $R_2(x)>0$ ואם $x<0$ אז $R_2(x)<0$

נובע שסביבה שמאלית של אפס, הפונקציה $f(x)=R_2(x)<0$ וכיוון ש$f(0)=0$ מתקיים כי $x=0$ אינה נקודת מינימום.

(באופן דומה היא גם לא נקודת מקסימום.)