

פיסיקה למתמטיקאים

משוואות אויילר לגראנג'

1. מסה m חופשית לנוע על שולחן חסר חיכוך ומחוברת ע"י מיתר באורך ℓ דרך חור בשולחן, למסה נוספת M . המסה M נעה אנכית בלבד והמיתר נותר מתוח בזמן התנועה.

(א) כתבו את הלגראנג'יאן L ומצאו את משוואות התנועה האנרגיה הקינטית נתונה ע"י

$$(1) \quad T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

והפוטנציאל נתון ע"י

$$(2) \quad U = -Mg(\ell - r)$$

ולכן הלגראנג'יאן הוא

$$(3) \quad L = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Mg(\ell - r).$$

משוואות התנועה הן

$$(4) \quad (M + m)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg$$

$$(5) \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0.$$

גם בבעיה זו θ קורדינטה ציקלית ולכן התנע הזיתי $J = mr^2\dot{\theta}$ נשמר. מהצבת התנע הזיתי ב (4) נקבל

$$(6) \quad (M + m)\ddot{r} = \frac{J^2}{mr^3} - Mg.$$

(ב) מצאו תנאי על נקודת שווי המשקל (רדיוס המעגל r_0) עבורו m מבצעת תנועה מעגלית

על מנת שתתבצע תנועה מעגלית עם רדיוס r_0 , נדרוש $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ מהצבה של r_0 באגף ימין של (6) נקבל את תנאי שווי המשקל

$$(7) \quad r_0^3 = \frac{J^2}{Mmg}.$$

(ג) מצאו את תדירות התנודות הקטנות ביחס לשווי המשקל
 תהי $\delta(t)$ סטייה קטנה ממצב שווי המשקל ($\delta \ll r_0$). נציב $r = r_0 + \delta$
 ב (6) ונקבל (עד לסדר ראשון ב δ)

$$(8) \quad (M + m)\ddot{\delta} = \frac{J^2}{mr_0^3} \left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right) - Mg$$

ומהצבת תנאי שווי המשקל (7) נקבל את משוואת התנועה

$$(9) \quad \ddot{\delta} + \frac{3J^2}{mr_0^4(M + m)}\delta = 0.$$

משוואה (9) מתארת תנודות קטנות ביחס לנקודת שווי המשקל עם
 תדירות

$$(10) \quad \Omega = \sqrt{\frac{3M}{M + m}} \sqrt{\frac{g}{r_0}}.$$