

## מתמטיקה בדידה (88195) – בחינת סיום (מועד א') פרופ' סטוארט מרגוליס, פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.  
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. אם פתרתם את כל השאלות – נא לציין 4 שאלות  
לבדיקה, אחרת תיבדקנה 4 הראשונות. כל השאלות שוות-משקל.  
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות. ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".

*בהצלחה!*

- נגדיר  $p \bar{\wedge} q := \neg(p \wedge q)$ .  
א. הוכיחו: ניתן לממש כל טבלת אמת, בכל מספר משתנים, באמצעות שימוש בקשר  $\bar{\wedge}$  בלבד.  
ב. ממשו בעזרת  $\bar{\wedge}$  בלבד את טבלת האמת של  $p \rightarrow q$ .
- תהי  $P(A)$  קבוצת החזקה של  $A$ .  
א. הוכיחו:  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ .  
ב. הוכיחו:  $P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)$ , ושוויון אם ורק אם  $A \subseteq B$  או  $B \subseteq A$ .
- יהי  $R$  יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי על קבוצה  $X$ . נגדיר יחס  $S$  על  $X$  על ידי:  
 $(a, b) \in S \Leftrightarrow (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \quad (\forall a, b \in X)$   
א. הוכיחו:  $S$  הוא יחס שקילות.  
ב. הוכיחו:  $S$  הוא יחס השוויון ( $a = b$ ) אם ורק אם  $R$  הוא יחס סדר חלקי.  
ג. תהי  $X = P(\mathbb{R})$ , ויהי  $R$  היחס:  
 $(A, B) \in R \Leftrightarrow |A \setminus B| < \aleph_0 \quad (\forall A, B \in P(\mathbb{R}))$   
(אין צורך לבדוק ש- $R$  רפלקסיבי וטרנזיטיבי.) עבור יחס השקילות  $S$   
שהוגדר לעיל, מצאו את עוצמתה של כל מחלקת שקילות. נמקו.
- תהיינה  $\alpha \geq 2, \beta \geq \aleph_0$  עוצמות.  
א. הוכיחו:  $(2^\alpha)^\beta \leq 2^{(\alpha^\beta)}$   
ב. יהי  $\beta = \aleph_0$ . מצאו  $\alpha \geq 2$  שעבורו מתקיים שוויון בסעיף א'. נמקו.
- הוכיחו, בעזרת הלמה של צורן: בקבוצה סדורה חלקית, כל שרשרת מוכלת  
בשרשרת מקסימלית.