פתרון בוחן א' בקורס תורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ג

מרצים: פרופ' עוזי וישנה ופרופ' מיכאל מגרל

מתרגלים: תומר באואר וגיא בלשר

הוראות:

- יש לענות על כל שלוש השאלות פתרון מלא ומנומק.
- כתבו את תשובותיכם על גבי טופס הבחינה. ניתן להשתמש בשני צידי הדף. מחברת הטיוטה לא תיבדק.
- משך הבוחן: 90 דקות.
- סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

בהצלחה!

Lecturers: Prof. Uzi Vishne and Prof. Michael Megrel

Teaching assistants: Tomer Bauer and Guy Blachar

Instructions:

- Provide a full and detailed solution to all three questions.
- Write your answer on the exam form. You may use both sides of the paper. The draft notebook will not be checked.
- Total time: 90 minutes.
- The total score exceeds 100, but the maximal grade in the quiz is 100.
- Other resources: You may use a simple calculator.
- You may answer in English or Hebrew, as you wish.

Good Luck!

שאלה 1. תהי G חבורה, ותהיינה $H, K \leq G$ תת־חבורות כך ש-$|H| = 88$ ו-$|K| = 218$.

א. (15 נק') מצאו את כל האפשרויות עבור הסדר $|H \cap K|$. נמקו את תשובתכם.

ב. (15 נק') תנו דוגמה לחבורה G ותת־חבורות H, K כנ"ל כך ש-$H \cap K = \{e\}$.

Question 1. Let G be a group, and let $H, K \leq G$ be subgroups of G such that $|H| = 88$ and $|K| = 218$.

a. (15 pts) Find all possibilities for the order $|H \cap K|$. Justify your claims.

b. (15 pts) Give an example for a group G and subgroups $H, K \leq G$ as above such that $H \cap K = \{e\}$.

פתרון.

א. לפי משפט לגראנז', $|H \cap K| \mid |H| = 88$ וגם $|H \cap K| \mid |K| = 218$. לכן קיבלנו שמתקיים $|H \cap K| \mid (218, 88)$. נחשב את ה-gcd באמצעות אלגוריתם אוקלידס:

$$\begin{aligned}(218, 88) &= {\scriptstyle [218=2\cdot 88-42]} = (88, 42) = {\scriptstyle [88=2\cdot 42+4]} = \\ &= (42, 4) = {\scriptstyle [42=10\cdot 4+2]} = (4, 2) = {\scriptstyle [4=2\cdot 2+0]} = (2, 0) = 2\end{aligned}$$

מכאן קיבלנו $|H \cap K| \mid 2$, ולכן $|H \cap K| \in \{1, 2\}$.

ב. יש הרבה דוגמאות. אפשרות אחת היא חבורה מהצורה $G = \mathbb{Z}_{88} \times \mathbb{Z}_{218}$, ולבחור $H = \mathbb{Z}_{88} \times \{0\}$ ו-$K = \{0\} \times \mathbb{Z}_{218}$. מתקיים $|H| = 88$ ו-$|K| = 218$, וכדרוש בשאלה $H \cap K = \{(0, 0)\}$.
אפשרות אחרת היא לבחור את החבורה $G = S_{88+218}$, ובתוכה את תת־החבורות $H = \langle (1\ 2\ \cdots\ 88) \rangle$ ו-$K = \langle (89\ 90\ \cdots\ 88+218) \rangle$.

שאלה 2. (35 נק') יהי p מספר ראשוני אי־זוגי. מצאו את ה-n המינימלי שעבורו קיים שיכון (מונומורפיזם) $f \colon \mathbb{Z}_{2p^2} \to S_n$, והוכיחו את קביעתכם.
(שימו לב: עליכם להראות שקיים שיכון עבור ה-n שמצאתם, וגם את המינימליות של n.)

Question 2. (35 pts) Let p be an odd prime number. Find the minimal value of n for which there is an embedding (monomorphism) $f \colon \mathbb{Z}_{2p^2} \to S_n$, and prove your claim.

(Note: You need to show there exists an embedding for the value of n you found, and the minimality of n.)

פתרון. נראה כי ה-n המינימלי שעבורו יש שיכון כזה הוא $n = p^2 + 2$.
ראשית, נראה כי עבור $n = p^2 + 2$ קיים שיכון $f \colon \mathbb{Z}_{2p^2} \to S_{p^2+2}$. אכן, נשים לב כי ב-$S_{p^2+2}$ יש תמורה מסדר $2p^2$: למשל $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ p^2)(p^2+1\quad p^2+2)$. כיוון ש-$\sigma$ היא מכפלת מחזורים זרים מאורכים p^2 ו-2, מתקיים $o(\sigma) = \operatorname{lcm}(2, p^2) = 2p^2$.
כעת נגדיר $f \colon \mathbb{Z}_{2p^2} \to S_{p^2+2}$ לפי $f(i) = \sigma^i$. זוהי פונקציה מוגדרת היטב, כי אם $i \equiv j \pmod{2p^2}$ אז $(i - j) \mid (2p^2) = o(\sigma)$, ולכן לפי טענה מההרצאה מתקיים $f(i) = \sigma^i = \sigma^j = f(j)$. זהו הומומורפיזם, כי $f(i + j) = \sigma^{i+j} = \sigma^i \sigma^j = f(i) f(j)$.
זהו שיכון, כי אם $i \in \ker f$ אז $f(i) = \sigma^i = \mathrm{id}$, לכן $o(\sigma) \mid i$, כלומר $i \equiv 0 \pmod{2p^2}$.

בסך הכל הראינו שיש שיכון $f:\mathbb{Z}_{2p^2}\to S_{p^2+2}$.

כעת נניח $n<p^2+2$, ונניח בשלילה שיש שיכון $f:\mathbb{Z}_{2p^2}\to S_n$. שיכון שומר על הסדרים של איברים, לכן $o(f(1))=o(1)=2p^2$, כלומר $f(1)\in S_n$ היא תמורה מסדר $2p^2$. אם נכתוב את $f(1)$ כמכפלת מחזורים זרים באורכים $k_1,\ldots,k_t$, לפי טענה מההרצאה נקבל כי $2p^2=o(f(1))=\mathrm{lcm}(k_1,\ldots,k_t)$. בפרט יש k_i שעבורו $2\mid k_i$, ויש k_j שעבורו $p^2\mid k_j$. אבל אז $p^2+2\le k_1+\cdots+k_t\le n$, בסתירה.

שאלה 3. תזכורת: החבורה D_n נוצרת על ידי σ,τ כך ש-$\sigma^n=\tau^2=(\tau\sigma)^2=\mathrm{id}$.

תהי $G=D_{14}$. נתבונן בתת־החבורות

$$H=\left\langle \tau\sigma^2\tau,\ \sigma^6\right\rangle$$
$$K=\left\langle \tau\sigma^2\tau\sigma^3\tau\right\rangle$$

ידוע שבדיוק אחת מבין H,K נורמלית ב-G.

א. (5 נק') הוכיחו מהיחסים הנתונים כי $\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1}$.

ב. (15 נק') מצאו מיהי תת־החבורה הנורמלית מבין השתיים, והוכיחו את קביעתכם.

ג. (20 נק') נסמן ב-N את תת־החבורה הנורמלית שבחרתם בסעיף הקודם. ידוע כי G/N איזומורפית לאחת מבין החבורות $\{e\},\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4$. מצאו לאיזו חבורה מתוך הרשימה איזומורפית חבורת המנה G/N, והוכיחו שהן איזומורפיות.

Question 3. Reminder: The group D_n is generated by σ,τ such that $\sigma^n=\tau^2=(\tau\sigma)^2=\mathrm{id}$.

Let $G=D_{14}$. Consider the subgroups

$$H=\left\langle \tau\sigma^2\tau,\ \sigma^6\right\rangle$$
$$K=\left\langle \tau\sigma^2\tau\sigma^3\tau\right\rangle$$

It is known that exactly one of H,K is normal in G.

a. (5 pts) Prove from the given relations that $\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1}$.

b. (15 pts) Find which of the subgroups H,K is the normal subgroup, and prove your claim.

c. (20 pts) Let N denote the normal subgroup you chose in the previous part. It is known that the group G/N is isomorphic to one of the groups $\{e\},\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4$. Find which group from this list is isomorphic to the quotient group G/N, and prove they are isomorphic.

פתרון.

א. מהיחס $\tau^2=\mathrm{id}$ נובע $\tau^{-1}=\tau$, ומהיחס $\tau\sigma\tau\sigma=(\tau\sigma)^2=\mathrm{id}$ נובע $\tau\sigma\tau=\sigma^{-1}$. משילוב שניהם נקבל $\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1}$.

ב. ראשית נפשט את שתי תת־החבורות. נשים לב כי מכך ש-$\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$ נובע שלכל i מתקיים

$$\tau\sigma^i\tau^{-1} = (\tau\sigma\tau^{-1})^i = (\sigma^{-1})^i = \sigma^{-i}$$

ולכן

$$H = \left\langle \tau\sigma^2\tau,\ \sigma^6 \right\rangle = \left\langle \tau\sigma^2\tau^{-1}, \sigma^6 \right\rangle = \left\langle \sigma^{-2}, \sigma^6 \right\rangle = \left\langle \sigma^{12}, \sigma^6 \right\rangle = \left\langle \sigma^6 \right\rangle$$
$$K = \left\langle \tau\sigma^2\tau\sigma^3\tau \right\rangle = \left\langle \tau\sigma^2\tau\sigma^3\tau^{-1} \right\rangle = \left\langle \tau\sigma^2\sigma^{-3} \right\rangle = \left\langle \tau\sigma^{-1} \right\rangle = \left\langle \tau\sigma^{13} \right\rangle$$

אפשר לשים לב גם כי $H = \left\langle \sigma^2 \right\rangle$: קל לראות ש-$H \subseteq \left\langle \sigma^2 \right\rangle$ (כי $\sigma^6 \in \left\langle \sigma^2 \right\rangle$), ומצד שני $\sigma^2 = \sigma^{-12} = (\sigma^6)^{-2} \in H$.

נטען כי $H \lhd D_{14}$ ו-$K \ntriangleleft D_{14}$. ידוע שבדיוק אחת מהן נורמלית ב-D_{14}, לכן מספיק להראות רק את אחת הטענות; בשביל שלמות הפתרון נראה את שתיהן:

- $H \lhd D_{14}$: יהי $g \in D_{14}$, ויהי $h = \sigma^{2k} \in H$. אם $g = \sigma^i$ לאיזשהו i, אז

$$ghg^{-1} = \sigma^i\sigma^{2k}\sigma^{-i} = \sigma^{2k} \in H,$$

ואם $g = \tau\sigma^i$ לאיזשהו i, אז

$$ghg^{-1} = \tau\sigma^i\sigma^{2k}(\tau\sigma^i)^{-1} = \tau\sigma^i\sigma^{2k}\sigma^{-i}\tau^{-1} = \tau\sigma^{2k}\tau^{-1} = \sigma^{-2k} \in H.$$

בסך הכל מתקיים $ghg^{-1} \in H$ לכל $g \in D_{14}$ ו-$h \in H$, ומכאן נסיק כי $H \lhd D_{14}$.

- $K \ntriangleleft D_{14}$: אפשר לשים לב ש-$|K| = o(\tau\sigma^{-1}) = 2$, כי

$$(\tau\sigma^{-1})^2 = \tau\sigma^{-1}\tau\sigma^{-1} = \tau(\tau\sigma\tau^{-1})\tau\sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1} = \mathrm{id}.$$

לכן $K = \left\{ \mathrm{id}, \tau\sigma^{-1} \right\}$. נוודא כי ד$K$ אינה סגורה להצמדה, למשל

$$\sigma(\tau\sigma^{-1})\sigma^{-1} = \sigma\tau\sigma^{-2} = \tau\sigma^{-1}\sigma^{-2} = \tau\sigma^{-3} \notin K.$$

לכן $K \ntriangleleft D_{14}$.

ג. מהסעיף הקודם קיבלנו כי $N = H$. ראשית נחשב את הסדר של המנה G/H על מנת לפסול חלק מהאופציות: לפי שאלה מהתרגול,

$$|H| = o(\sigma^2) = \frac{o(\sigma)}{(o(\sigma), 2)} = \frac{14}{(14, 2)} = \frac{14}{2} = 7.$$

לפי משפט לגראנז', $|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{28}{7} = 4$. לצורך הנוחות אפשר ממש לבחור נציגים למחלקות – $G/H = \{H, \sigma H, \tau H, \tau\sigma H\}$.

לכן האופציות שנשארו הן $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ או $\mathbb{Z}_4$. מטרתנו תהיה להוכיח ש-$G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

נוכל לפסול את $\mathbb{Z}_4$, למשל, אם נראה שכל האיברים ב-G/H הם מסדר לכל היותר 2.

אכן, חישוב ישיר יראה שמתקיים

$$H^2 = H$$
$$(\sigma H)^2 = \sigma^2 H = H$$
$$(\tau H)^2 = \tau^2 H = H$$
$$(\tau\sigma H)^2 = (\tau\sigma)^2 H = H$$

לכן בחבורת המנה אין איבר מסדר 4, והיא חייבת להיות איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
ניתן לבנות את האיזומורפיזם גם באמצעות משפט האיזומורפיזמים הראשון: נגדיר $f\colon G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ לפי $f(\tau^i\sigma^j) = (i \pmod 2, j \pmod 2)$. ראשית נטען כי f הומומורפיזם. אכן, יהיו $\tau^i\sigma^j, \tau^k\sigma^\ell \in G$. אם $k=0$ אז

$$\begin{aligned} f((\tau^i\sigma^j)\sigma^\ell) = f(\tau^i\sigma^{j+\ell}) = (i \pmod 2, (j+\ell) \pmod 2) = \\ = (i \pmod 2, j \pmod 2) + (0, \ell \pmod 2) = f(\tau^i\sigma^j) + f(\sigma^\ell) \end{aligned}$$

ואם $k=1$ אז

$$\begin{aligned} f((\tau^i\sigma^j)(\tau\sigma^\ell)) = f(\tau^i\sigma^j\tau\sigma^\ell) = f(\tau^i\tau\sigma^{-j}\sigma^\ell) = f(\tau^{i+1}\sigma^{-j+\ell}) = \\ = ((i+1) \pmod 2, (-j+\ell) \pmod 2) = \\ = (i \pmod 2, j \pmod 2) + (1, \ell \pmod 2) = f(\tau^i\sigma^j) + f(\tau\sigma^\ell) \end{aligned}$$

כלומר בכל מקרה f היא הומומורפיזם. קל לראות ש-f היא על, שהרי לכל זוג מספרים $0 \le i, j \le 1$ מתקיים $f(\tau^i\sigma^j) = (i,j)$. לחישוב הגרעין,

$$\begin{aligned} \ker f = \left\{\tau^i\sigma^j \in G \mid f(\tau^i\sigma^j) = (0,0)\right\} = \\ = \left\{\tau^i\sigma^j \in G \mid i \equiv j \equiv 0 \pmod 2\right\} = \left\{\sigma^{2k} \mid 0 \le k \le 6\right\} = H \end{aligned}.$$

ממשפט האיזומורפיזמים הראשון נקבל $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, כנדרש.