מבני נתונים ואלגוריתמים – תרגול #6

עצים פורשים מינימלים – *Minimum spanning tree* - המשך

אלגוריתמים (תזכורת):

קרוסקל:

- ממיינים את הקשתות בסדר עולה.
- נוסיף את הקשת הכי זולה לקבוצת ריקה A.
- עוברים על כל קשת – אם הוספת הקשת לקבוצה A אינה סוגרת מעגל – נוסיף אותה לקבוצה.
- קבוצת הקשתות A היא עפ"מ.

פרים:

- בחר את הקשת הכי זולה והוסף לעץ (ריק).
- כל עוד לא כל הקודקודים נמצאים בעץ-
- הוסף את הקשת הכי זולה מקודקוד בעץ אל קודקוד מחוץ לעץ.

סיבוכיות בניית עפ"מ– *O(ElogV)*

מספר קשתות בעפ"מ – *|V|-1*

תרגיל:

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ פונקציית משקל על הקשתות $w: E\to\mathbb{R}$. יהי T עפ"מ של G לפי פונקציית המשקל w. נגדיר פונקציית משקל חדשה $w': E\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $w'(e)=\ w(e)+c$ כאשר $c\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו. האם T הוא עפ"מ גם לפי w'?

פיתרון:

נוכיח שכן – נניח בשלילה כי קיים עפ"מ T' כך ש- $\sum_{e\in T'} w'(e)<\sum_{e\in T} w'(e)$. מספר הקשתות ב- T וב-T' הוא בדיוק *|V|-1*. לכן:

$$\sum_{e\in T'} w(e)+\ c(|V|-1)=\sum_{e\in T'} w'(e)\ <\sum_{e\in T} w'(e)=\sum_{e\in T} w(e)+\ c(|V|-1)$$

לכן:

$$\sum_{e\in T'} w(e)\ <\sum_{e\in T} w(e)$$

וזו סתירה לכך ש-T הוא עפ"מ לפי w.

תרגיל:

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ פונקציית משקל על הקשתות $w: E\to\mathbb{R}$. מצא עץ פורש <u>מקסימלי</u> של G.

פיתרון:

נגדיר פונקציית משקל חדשה $w': E\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $w'(e)=-w(e)$. יהי T עפ"מ לפי w'. נוכיח כי T הוא עץ פורש מקסימלי לפי w:

נניח בשלילה כי קיים T' כך ש- $\sum_{e\in T'} w(e)>\sum_{e\in T} w(e)$.

לכן:

$$-\sum_{e\in T'} w'(e)=\sum_{e\in T'} w(e)\ >\sum_{e\in T} w(e)\ =-\sum_{e\in T} w'(e)$$

מכאן ש-

$$\sum_{e\in T'} w'(e) < \sum_{e\in T} w'(e)$$

וזו סתירה לכך ש-T הוא עפ"מ לפי w' .

תרגיל:

נתון גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ פונקציית משקל על הקשתות $\boldsymbol{w}: \boldsymbol{E} \to \mathbb{N}$. כל קשת צבועה בצהוב או בשחור. הציעו אלגוריתם המוצא את העפ"מ הצהוב ביותר (כלומר עם מספר הקשתות הצהובות הגדול ביותר).

פיתרון:

נרצה לתת לקשתות צהובות עדיפות על פני קשתות שחורות מאותו משקל.

n = |V|

נגדיר w' חדשה:

$$w'(e) = \begin{cases} w(e) - \frac{1}{n} & e \text{ is yellow} \\ w(e) & otherwise \end{cases}$$

נמצא עפ"מ *T* לפי w' באמצעות *Prim*.

נוכיח ש- *T* העפ"מ הצהוב ביותר לפי *w* אם"ם *T* הוא עפ"מ לפי w':

נסמן ב- *y(T)* את מספר הקשתות הצהובות בעפ"מ *T*. מתקיים ש-

$$w'(T) = w(T) - \frac{y(T)}{n}$$

- נשים לב ש-*w* תמיד מחזירה ערכים שלמים לכן *w(T)* שלם לכל *T*.

<u>ראשית</u> ניקח 2 עצים *T1,T2* כך ש- $w(T_1) > w(T_2)$, אז:

$$w'(T_1) - w'(T_2) = \underbrace{w(T_1) - w(T_2)}_{\geq 1} - \frac{1}{n} \underbrace{(y(T_1) - y(T_2))}_{<1} > 0$$

ולכן:

$$w(T_1) > w(T_2) \implies w'(T_1) > w'(T_2)$$

כלומר המונוטוניות של משקלי העצים נשמרת ללא קשר לצבע הקשתות. עץ שלא היה עפ"מ לפי 'w לא יכול להיות עפ"מ לפי w רק בגלל שיש לו הרבה קשתות צהובות, כי למרות עדיפותן על השחורות, השפעתן לא מספיקה, בגלל הפקטור הנמוך שהוספנו.

<u>שנית</u> נבחין שאם $w(T_1) = w(T_2)$, אז $w'(T_1) < w'(T_2)$ אם"ם $y(T_1) > y(T_2)$

כלומר כאשר המשקל זהה, העפ"מ הצהוב ביותר יהיה בעל מספר הקשתות הצהובות הגדול ביותר.

← מכאן שקבוצת העפ"מים של G לפי 'w היא תת-קבוצה של העפ"מים לפי w עם מספר מקסימלי של קשתות צהובות.

תרגיל:

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון וקשיר. כמו כן נתונות פונקציות משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{R}$, $w': E \to \mathbb{R}$ המקיימות $w(e_1) \leq w(e_2)$ אם"ם $w'(e_1) \leq w'(e_2)$ לכל זוג קשתות e_1, e_2. הוכח כי *T* הוא עפ"מ לפי w' אם"ם הוא עפ"מ לפי *w*.

הוכחה:

← יהי T עפ"מ לפי w. לכן קיימת ריצה של קרוסקל המוצאת את T לפי w (ללא הוכחה). כלומר קיים סידור מונוטוני לא יורד של הקשתות לפי w שהרצת קרוסקל עליו מניבה את T. מהנחת התרגיל, סידור זה הוא מונוטוני לא יורד גם לפי w', ולכן מנכונות קרוסקל T הוא עפ"מ לפי w'.

→ ההוכחה זהה כאשר מחליפים את w, w'.

<u>מסקנה</u> – בבניית עפ"מ, מה שמשנה הוא סדר המשקלות ולא המשקלות עצמן.

<u>תרגיל:</u>

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון וקשיר עם פונקצית משקל על **הקודקודים** $w: V \to \mathbb{R}$.

תארו אלגוריתם המוצא עץ פורש T המביא למינימום את הפונקציה

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d_T(v)} \cdot \mathrm{w(v)}$$

כאשר $d_T(v)$ היא הדרגה של V ב-T.

פיתרון:

- נגדיר פונקציית משקל על **הקשתות**: $f: E \to \mathbb{N},\ f((u,v)) = w(u) + w(v)$
- נמצא עפ"מ עם הפונקציה f.

הוכחת נכונות:

ע"פ האלגוריתם הזה, מתקיים

$$f(T) = \sum_{(u,v) \in E_T} f\big((u,v)\big) = \sum_{(u,v) \in E_T} (w(u) + w(v)) = \sum_{v \in V} d_T(v) \cdot w(v))$$

המעבר האחרון אפשרי שכן משקל כל קודקוד נספר כמספר הקשתות הנכנסות אליו או יוצאות ממנו וזוהי דרגתו. לכן f(T) מינימלי גורר ש- $\sum_{(u,v) \in E_T} d_T(v) \cdot w(v))$ מינימלי , ו-f(T) מינימלי כאשר T עפ"מ לפי פונקצית המשקל f.

<u>תרגיל:</u>

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון וקשיר עם פונקצית משקל על הקשתות $w: E \to \mathbb{N}$.

1) הציעו אלגוריתם אשר בהינתן קשת $e \in E$ מכריע האם **קיים** עפ"מ של G המכיל את e.
2) הציעו אלגוריתם אשר בהינתן קשת $e \in E$ מכריע האם **כל** עפ"מ של G מכיל את e.

פיתרון:

נציע תחילה 2 פתרונות (לא מספיק יעילים):

<u>עבור ההכרעה האם **קיים** עפ"מ המכיל את e:</u>

1- צבע את e בצהוב ואת שאר הקשתות בשחור.
2- הרץ את האלגוריתם למציאת העפ"מ הצהוב ביותר – נסמנו ב- T.
3- החזר כן אם ורק אם e ב- T.

<u>נכונות:</u>

מנכונות האלגוריתם למציאת העפ"מ הצהוב ביותר – אם לא קיים עפ"מ שמכיל את e, העץ המתקבל T לא יכל את e והאלגוריתם יחזיר "לא". מצד שני, נבחין כי קבוצת העפ"מים המכילים את e הם בדיוק קבוצת העפ"מים הצהובים ביותר. לכן אם יש עפ"מ המכיל את e, האלגוריתם יגלה אותו ויחזיר "כן".

סיבוכיות- *E(ElogV)*

<u>עבור ההכרעה האם **כל** עפ"מ מכיל את e:</u>

1- צבע את e בשחור ואת שאר הקשתות בצהוב.
2- הרץ את האלגוריתם למציאת העפ"מ הצהוב ביותר – נסמנו ב- T.
3- החזר כן אם ורק אם e ב- T.

<u>נכונות:</u>
אם כל עפ"מ מכיל את e, אז העץ T המתקבל יכיל את הקשת והאלגוריתם יחזיר "כן". מצד שני, קבוצת העפ"מים שאינם מכילים את e היא בדיוק קבוצת העפ"מים הצהובים ביותר. לכן אם קיים עפ"מ שאינו מכיל את e, אז העץ המתקבל לא יכל את e (לפי הנכונות של האלגוריתם למציאת העפ"מ הצהוב ביותר) והאלגוריתם יחזיר "לא".
סיבוכיות- *E(ElogV)*

נספח: החלק הזה הוא **לא חלק מהחומר** מכיוון שהוכחת הטענות הבאות מתבססת על האלגוריתם הגנרי למציאת עפ"מ שלא נלמד בהרצאה.
ניתן לפתור את שני הסעיפים של השאלה הקודמת **בזמן לינארי**, באמצעות 2 הטענות (בלי הוכחה):

טענה 1: קשת e נמצאת באיזשהו עפ"מ של G ⇔ כל מעגל המכיל את e מכיל קשת $e' \neq e$ כך ש-$w(e') \geq w(e)$.

טענה 2: קשת e נמצאת באיזשהו עפ"מ של G ⇔ כל מעגל המכיל את e מכיל קשת $e' \neq e$ כך ש-$w(e') > w(e)$.

לכאורה נדמה שזוג הטענות נותנת אפיונים שהם קשים יותר לוידוא מבחינה חישובית ,שכן אנו צריכים לעבור על כל המעגלים המכילים קשת בכדי להכריע האם היא נמצאת באיזשהו עפ"מ או לחילופין בכל עפ"מ .למרות שמשימה זו נשמעת מורכבת מבחינה חישובית(שכן ייתכנו מספר אקספוננציאלי של מעגלים בגרף אשר מכילים את הקשת), היא פשוטה למדי .
נבחין כי כל מעגל המכיל את *e=uv* מכיל קשת $e' \neq e$ כך ש- $w(e') \geq w(e)$ אם רק אם בגרף המתקבל מ- G ע"י הסרת כל הקשתות עם משקל לפחות $w(e)$ אין מסלול מ- u ל-v.
באופן דומה ,כל מעגל המכיל את e מכיל קשת 'e כך ש-$w(e') > w(e)$ אם ורק אם בגרף המתקבל מ G - תוך הסרת – e יחד עם כל הקשתות עם משקל הגדול ממש מ-$w(e)$ אין מסלול מ- u ל-v.

אבחנה זו יחד עם 2 הטענות נותנות את האלגוריתמים הבאים:

<u>עבור ההכרעה האם **קיים** עפ"מ המכיל את e:</u>
1- בנה גרף $G' = (V, E')$ כך ש- $E' = \{e \in E: w(e') < w(e)\}$.
2- החזר "כן" אם ורק אם לא קיים מסלול המחבר בין u ל- v ב-'G (שימוש בהרצת DFS או BFS לבדיקת קיום מסלול).

<u>עבור ההכרעה האם **כל** עפ"מ מכיל את e:</u>
- בנה גרף $G' = (V, E')$ כך ש- $E' = \{e \in E: w(e') < w(e)\} \setminus \{e\}$.
2- החזר "כן" אם ורק אם לא קיים מסלול המחבר בין u ל- v ב-'G (שימוש בהרצת DFS או BFS לבדיקת קיום מסלול).

סיבוכיות: O(E'+V) ← O(E+V).