אנליזה מודרנית 1 - תרגול 6

10 בדצמבר 2014

0.0.1 משפט לוזין:

נניח $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מדידה אזי לכל $\epsilon>0$ קיימת $A\subset[0,1]$ מדידה כך ש-$m(A)\geq 1-\epsilon$.

הוכחה

f מדידה לכן ניתן להתקרב אליה כב"מ ע"י פונקציות רציפות. נבחר סידרה $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$, $\forall n, f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך ש-f $\overset{\text{a.e}}{\to}$ f_n. לכן לפי משפט אגורוב מהשיעור הקודם קיימת $A\subset[0,1]$ כך ש-$m(A)\geq 1-\epsilon$ וגם $f_n\to f$ במ"ש ב-A. מכיוון שהסידרה היא של פונקציות רציפות וההתכנסות ב-A היא במ"ש נקבל כי $f|_A$ רציפה כדרוש.

תזכורת

(Ω,ρ,μ) מרחב מידה. $f:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציה פשוטה מדידה $f\in J(\Omega)$ שמוגדרת ע"י ערכים קבועים $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\ldots$ על הקבוצות המדידות $\Phi^{(1)},\Phi^{(2)},\ldots$ בהתאמה.

$$\int_\Omega \varphi d\mu := \sum_k \varphi^{(k)}\mu\left(\Phi^{(k)}\right)$$

$$\int_\Omega |\varphi|\, d\mu<\infty \Leftrightarrow \varphi\in L(\Omega)$$

ז"א φ אינטגרבילית μ. $A\subset\Omega, \mu(A)<\infty$. לכל $f\in J(A)$ קיימת סידרה של פונקציות פשוטות מדידות, $\{\varphi_n\}$ שמתכנסת במ"ש ל-f ב-A. נגדיר:

$$\int_A f d\mu := \lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$$

ונקבל ש: $f\in L(A)$ (אינטגרבילית μ ב-A) אם לפחות אחת מהפונקציות הפשוטות בסידרה אינטגרבילית μ ב-A.

תרגיל

(Ω,S,μ) מרחב מידה ונניח $X\subseteq\Omega$ כך ש:

$$\mu(X)=1$$

וכן ש-$A,B,C\subseteq X$ כך ש: $\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)\geq 2.5$ האם יתכן ש-$A\cap B\cap C=\emptyset$?

פתרון:

נגדיר

$$\begin{aligned} f: &= \mathbb{1}_A \\ g: &= \mathbb{1}_B \\ h: &= \mathbb{1}_c \end{aligned}$$

ונניח ש$A\cap B\cap C=\emptyset$. אזי:

$$\int_\Omega (f+g+h)\,d\mu=\int_X (f+g+h)\,d\mu$$

כיוון שכל $x\in X$ נמצאות לכל היותר ב־2 מהקבוצות A,B,C לפי הנחה $(f+g+h)(x)\leq 2$. מונוטוניות ביחס לאינטגרל נותנת כי:

$$\int_X (f+g+h)\,d\mu\leq\int_X 2d\mu=2\mu(X)=2$$

מאידך, מאדיטיביות האינטגרל ביחס לאינטגרנד

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f+g+h)\,d\mu &= \int_\Omega d\mu+\int_\Omega gd\mu+\int_\Omega hd\mu \\ &= \mu(A)+\mu(B)+\mu(C)\geq 2.5 \end{aligned}$$

קיבלנו

$$2.5\leq\int_\Omega (f+g+h)\,d\mu\leq 2$$

סתירה.

תרגיל:

יהיו f,g אינטגרביליות ב־Ω. הוכיחו כי אם

$$\int_A fd\mu=\int_A gd\mu$$

אזי לכל $A\subseteq\Omega$ $f(x)=g(x)$ כמעט לכל $x\in\Omega$.

הוכחה

נניח בשלילה ש:

$$\mu(\{x\mid f(x)=g(x)\})>0$$

נשים לב ש:

$$\{x\mid f(x)\neq g(x)\}=\{x\mid f(x)>g(x)\}\sqcup\{x\mid f(x)<g(x)\}$$

מכאן נקבל, לפי אדיטיביות המידה שלפחות אחת משתי הקבוצות באיחוד הזר בעלת מידה גדולה ממש מ־0. נניח ב.ה.כ ש: $\mu(A) > 0$ באשר: $A = \{x \mid f(x) > g(x)\}$ (נשים לב שמכיוון שf, g אינט' בפרט מדידות ולכן $f - g$ מדידה לכן $A = \{(f-g) > 0\}$ מדידה).
לכל $n \in \mathbb{N}$נגדיר

$$A_n := \left\{x \mid f(x) > g(x) + \frac{1}{n}\right\}$$

אזי $\{A_n\}$ סידרה עולה של קבוצות מדידות ו־$\bigcup_{\mathbb{N}} A_n = A$. לכן לפי רציפות המידה:

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$\Leftarrow$קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $\mu(A) < \mu(A_{n_0}) + \frac{\mu(A)}{2}$ אולם לפי ההנחה

$$\int_{A_{n_0}} f d\mu = \int_{A_n} g d\mu$$

ולפי אדיטיביות S על פונקציות מדידות.

$$\int_{A_{n_0}} (f-g)\, d\mu = 0$$

מצד שני לפי מונטוניות האינטגרל ביחס לאינטגרנד:

$$\int_{A_{n_0}} (f-g)\, d\mu \ge \int_{A_{n_0}} \frac{d\mu}{n_0} = \frac{\mu(A_{n_0})}{n_0} > \frac{\mu(A) - \frac{\mu(A)}{2}}{n_0} = \frac{\mu(A)}{2n_0}$$

סתירה.

שאלה (מתרגילי הבית)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה כך ש־$m(A) = 1$. הוכיחו שקיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש: $m(A \cap (-\infty, a)) = \frac{1}{2}$.

הוכחה

נגדיר $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = m(A \cap (-\infty, t))$$

אזי f רציפה, שכן

$$\forall t_1 > t_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t_1) - f(t_2)| = m(A \cap (-\infty, t_1)) - m(A \cap (-\infty, t_2))$$

מתכונת החיסוריות:

$$= m(A \cap (t_2, t_1)) \le m(t_2, t_1) = t_1 - t_2$$

כמו כן, f לא יורדת (לפי מונטוניות m). וכן קיים $r_1 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$f(r_1) = m(A \cap (-\infty, r_1)) := \alpha$$

ומתקיים עבורו:

1. $\alpha > 0$ (אחרת $m(A) = 0$)
2. $\alpha < 1/4$ (אחרת $\mathrm{m}(A) = \infty$)

וכן קיים $r_2 \in \mathbb{R}$ כך ש: $\frac{3}{4} < \beta = m(A \cap (-\infty, r_2)) = f(r_2)$. אחרת $1 > m(A)$ כי $\lim_{r\to\infty} f(r) = m(A)$.
f לא יורדת $\Leftarrow r_1 < r_2$. לפי משפט ע.ה.ב

$$\forall x \in [a, b]\, \exists c \in [r_1, r_2]$$

כך ש: $f(c) = x$. בפרט עבור $\frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \subset [\alpha, \beta]$ קיים $a \in [r_1, r_2]$ כך ש: $f(a) = \frac{1}{2}$ כלומר $m(A \cap (-\infty, a)) = \frac{1}{2}$ כדרוש.

0.1 משפט ערך הביניים האינטגרלי

תהי f מדידה כך ש

$$\forall x \in A \subset \mathbb{R} : n \leq f(x) \leq N$$

ונניח $g(x) \geq 0$ ואינטגרבילית בA. אזי קיים $a \in \mathbb{R}$ $n \leq a \leq N$:

$$\int_A f(x)\, g(x)\, d\mu = a \int_A g(x)\, d\mu$$

הוכחה

נסמן $\int_A g(x)\, d\mu = c \geq 0$ אזי ממונוטוניות האינטגרל ביחס לאינטגרנד

$$n \cdot c = \int n \cdot g(x)\, d\mu \leq \int_A f(x)\, g(x)\, d\mu \leq \int_A N g(x)\, d\mu = Nc$$

נשים לב שאם $c = 0$ אזי מתקיים השיוויון הנדרש לכל $a \in \mathbb{R}$. כעת נניח $c > 0$ אז נוכל לחלק את שני האגפים באי"ש לעיל ב־C. נקבל

$$n \leq \frac{1}{c} \int_A f(x)\, g(x)\, d\mu \leq N$$

נגדיר $a := \frac{1}{c} \int_A f(x)\, g(x)\, d\mu$ אז $n \leq a \leq N$ וגם

$$\int_A f(x)\, g(x)\, d\mu = a \cdot c = a \int_A g(x)\, d\mu$$

מ.ש.ל.

הערה

תהיינה μ, ν מידות חיוביות מעל (Ω, S)כך ש: $\nu(\Omega) < \infty$ ומתקיים $\forall E \in S : \mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$. הוכחנו בעבר שבתנאים האלו מתקיים

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E \in S : (\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \epsilon)$$

תרגיל

הוכיחו כי אם (Ω,S,μ) מרחב מידה ואם $f\in\nu(\Omega)$ אז $\forall\epsilon>0\exists\delta>0:\left(\forall E\in S:\mu(E)<\delta\Rightarrow\int_E|f|\,d\mu<\epsilon\right)$

הוכחה

לכל $E\in S$ נגדיר:

$$\nu(E):=\int_E|f|\,d\mu$$

$f\in\nu(\Omega)$ לכן $|f|$ מדידה אי שלילית ולכן $\forall E\in S:\nu(E)\geq 0$. כמו כן, מתקיים כי $\nu(\emptyset)=\emptyset$ ומתקיימת האדיטיביות על S לפי אדיטיביות האינטגרל ביחס לקבוצה.

תוצאה

ν מידה חיובית על S. כעת, ν סופית כי

$$\nu(\Omega)=\int_\Omega|f|\,d\mu<\infty$$

כי $f\in L(\Omega)$ וכן

$$\mu(E)=0\Rightarrow\nu(E)=\int_E|f|\,d\mu=0$$

לכן, לפי התרגיל הקודם שהוכחנו בעבר מתקיימת התכונה הרצויה (תכונת הרציפות בהחלט של האינטגרל).

שאלה נוספת מתרגיל הבית

האם נובע כי f מדידה בהנתן ש:

1. $|f|$ מדידה.
2. f^3 מדידה.

פתרון:

1. נבחר קבוצה לא מדידה $E\notin S$ (קיימת אחרת כל הקבוצות מדידות ולכן כל הפונקציות מדידות) ונתבונן ב: $f=\mathbb{1}_E-\mathbb{1}_{E^c}$ אזי $E=\{f>0\}\notin S$ ולכן f איננה מדידה. אולם: $|f|=1$ קבועה ובפרט מדידה.
2. f^3מדידה ולכן לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, $\left\{f^3>\alpha^3\right\}\in S$. $\Leftarrow$ $\{f>\alpha\}\in S$ וזאת כאמור לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ לכן f מדידה.