תרגול מס' 12
טורי לורן, נקודות סינגולריות ומשפט השארית

<u>טור לורן:</u>

באופן כללי – טור חזקות שמופיעות בו גם חזקות שליליות. כלומר, טור מהצורה:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z-\alpha\right)^n .$$

<u>משפט:</u>

תהי f אנליטית בטבעת $\left\{z \mid R_1 < \left|z-\alpha\right| < R_2\right\}$ (כאשר $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$).

נגדיר: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\left(z-a\right)^{n+1}}dz$, כאשר C הוא מעגל ברדיוס $R_1 < r < R_2$ סביב $z=\alpha$.

אז הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z-\alpha\right)^n$ מתכנס בטבעת, וסכומו הוא הפונקציה f.

כלומר לכל z בטבעת מתקיים: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z-\alpha\right)^n$.

טור זה נקרא: **טור לורן של f סביב הנקודה α בטבעת** $R_1 < \left|z-\alpha\right| < R_2$.

אם $R_1 = 0$ אז הטור נקרא פשוט: **טור לורן של f סביב הנקודה α**.

<u>הגדרות:</u>

- החלק שמכיל את החזקות השליליות בטור לורן סביב α, כלומר - $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \left(z-\alpha\right)^n$, נקרא **<u>החלק הסינגולרי</u>** של הטור.
- המקדם של $\left(z-\alpha\right)^{-1}$ כלומר a_{-1}, בפיתוח לטור לורן סביב α, נקרא **<u>השארית</u>** של f בנקודה α וסימונו - $\mathrm{Res}\left(f,\alpha\right)$.

  אם נזכר איך מוגדר a_{-1} אז נקבל כי: $\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f,\alpha\right)$.

Pierre Alphonse Laurent
(1813-1854)

(תהילת עולם מובטחת למי שמוצא תמונה של פייר אלפונזו לורן)

<u>נקודת סינגולריות מבודדת:</u>

תהי f פונקציה אנליטית בעיגול נקוב - $\{z \mid 0<|z-\alpha|<r\}$, אם f אינה גזירה (או אינה מוגדרת) בנקודה α, אז α נקראת <u>נקודת סינגולריות מבודדת</u> של f.

<u>סוגי סינגולריות:</u>

1. **סינגולריות סליקה** – ניתן להגדיר פונקציה חדשה $\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq\alpha \\ a & z=\alpha \end{cases}$ כך ש- $\tilde{f}$ אנליטית בעיגול $\{z \mid |z-\alpha|<r\}$.

   במלים אחרות:
   ניתן לתת ערך כלשהו בנקודת הסינגולריות ולקבל פונקציה אנליטית – כלומר "לסלק" את הסינגולריות, דומה לנקודת "אי-רציפות סליקה" מחדו"א.

2. **קוטב** – אם ניתן להציג את *f* בצורה: $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$ כאשר *g* אנליטית, $g(\alpha)\neq 0$, אז α נקראת קוטב מסדר m של f. (קוטב מסדר 1 נקרא <u>קוטב פשוט</u>).

3. **סינגולריות עיקרית** - נק' סינגולריות שאינה סליקה ואינה קוטב.

<u>משפט:</u>

אם α אפס מסדר m של הפונקציה האנליטית f, אז α היא קוטב מסדר m של הפונקציה $g=\dfrac{1}{f}$.

<u>טבלה מסכמת:</u>

סוג הסינגולריות	התנהגות של הפונקציה סביב α	טור לורן (סביב α)
סליקה	1. הגבול $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ קיים ו<u>סופי</u>. 2. הפונקציה <u>חסומה</u> בסביבה של α. 3. מתקיים: $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)=0$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ - בעצם זהו <u>טור טיילור</u>.
קוטב מסדר *m*	1. $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$, כאשר *g* אנליטית ושונה מאפס ב- α. 2. $\lim_{z\to\alpha} f(z)=\infty$ 3. הגבול $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^m f(z)$ קיים, <u>סופי ושונה מאפס</u>.	$\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ - חלק סינגולרי <u>סופי</u>.
עיקרית	1. <u>לא קיים</u> הגבול $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ 2. לכל נקודה $w\in\mathbb{C}$ קיימת סדרת נקודות $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, כך ש- $z_n\to\alpha$ ומתקיים: $f(z_n)\to w$, בכל סביבה של α. כלומר, *f* מקבלת "כמעט" כל ערך מרוכב אפשרי בכל סביבה של הנק' α (זהו משפט קסוראטי ויירשטראס).	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ - חלק סינגולרי <u>אינסופי</u>.

<u>משפט השארית:</u>

יהי Γ קונטור סגור-פשוט, ו-*f* אנליטית על ובתוך Γ, פרט לנקודות הסינגולריות $a_1,...,a_n$ שנמצאות בפנים הקונטור, אז: $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f,a_k)$.

<u>חישוב שאריות:</u>

1. **עבור נקודות סינגולריות סליקות –**
השארית שווה ל-0 (תזכרו שהשארית היא המקדם של z^{-1} בטור לורן, אבל בטור לורן של פונקציה אנליטית אין כלל חזקות שליליות).
2. **בקטבים** -
אם α היא קוטב פשוט של*f*, אז: $\text{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$.
(דרך נוספת אפשר לראות בתרגיל מס' 8)

אם α היא קוטב מסדר *m* של*f* אז:
$$\text{Res}(f,\alpha) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-\alpha)^m\right)\right]$$
(נוסחאות אלו נובעות מתוך פיתוח לורן של f סביב הקוטב)

3. **בנקודת סינגולריות עיקרית –**
בד"כ אין ברירה אלא לחשב לפי <u>טור לורן</u>.

תרגיל מס' 1

מצא את טור לורן של הפונקציה $f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ סביב הנקודה $z=-2$, וחשב את השארית: $\operatorname{Res}(f,-2)$.

פתרון

נעזר בטור טיילור של הפונקציה $\sin z$: $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$.

ונקבל: $\sin\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1}$.

לכן:

$$f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}=((z+2)-5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n}-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1}$$

כעת, $\operatorname{Res}(f,-2)=a_{-1}$, ואם נסתכל על הפיתוח שקיבלנו, נקבל ישר ש-

$\operatorname{Res}(f,-2)=\frac{-5\cdot(-1)^0}{(0+1)!}=-5$ (המקדם הראשון בטור הימני).

תרגיל מס' 2

פתח את $f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)}$ לטור לורן:

א. בטבעת: $D_1=\{z\mid 0<|z|<1\}$

ב. בטבעת: $D_2=\{z\mid 1<|z|<2\}$

פתרון

א. מפירוק לשברים פשוטים נקבל: $f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$.

כעת, בטבעת D_1 מתקיים: $|z|<1$ ולכן:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

(פיתוח ע"י שימוש בטור גיאומטרי מתכנס - $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$, כאשר $|q|<1$).

כלומר קיבלנו: $\boxed{f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n}}$.

נשים לב, שזה בעצם טור טיילור (אין חזקות שליליות) וזה לא מפתיע, כי הפונקציה היא אנליטית בכל עיגול היחידה...

ב. בטבעת D_2 מתקיים: $\left|z\right|<2$ ולכן $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ ונקבל שוב כי: $\frac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}$.

לעומת זאת - $1<\left|z\right|$ ולכן לא ניתן להשתמש בפיתוח שעשינו בסעיף א. במקרה זה מה שנעשה זה נרשום את $\frac{1}{1-z}$ בצורה קצת אחרת:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

כעת, $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ בטבעת D_2 ולכן ניתן להשתמש בנוסחא של טור גאומטרי ונקבל:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}$$

נחבר הכל ביחד ונקבל:

$$\boxed{\begin{aligned}f\left(z\right)&=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}=\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}=-\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}}$$

תרגיל מס' 3

חשב את האינטגרל: $\int_{C}\frac{1}{\sin\left(z^{2}\right)}dz$, כאשר C הוא מעגל כלשהו ברדיוס $0<r<\sqrt{\pi}$, שמרכזו בראשית.

פתרון

ננסה למצוא את טור לורן של הפונקציה $f\left(z\right)=\frac{1}{\sin\left(z^{2}\right)}$ בעיגול הנקוב - $\left\{z\,|\,0<\left|z\right|<\sqrt{\pi}\right\}$

(f אנליטית בטבעת זו).

כעת נזכר כי: $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(2n+1\right)!}z^{2n+1}$, ולכן:

$$\sin\left(z^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{4n+2}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{4n}$$

לכן, אם נסמן: $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}z^{4n}$, אז נקבל ש-g היא פונקציה אנליטית בעיגול הלא-נקוב $\left\{z \mid |z|<\sqrt{\pi}\right\}$ (כי היא מוגדרת ע"י טור חזקות מתכנס), וכן לכל z בעיגול זה מתקיים: $g(z)\neq 0$.

לכן הפונקציה: $\frac{1}{g(z)}$ גם היא אנליטית בעיגול, וניתן לפתחה לטור טיילור סביב הראשית,

כלומר: $\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$.

לכן נקבל כי בעיגול הנקוב מתקיים: $f(z)=\frac{1}{\sin\left(z^2\right)}=\frac{1}{z^2 g(z)}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^{n-2}$.

כעת, נשים לב כי: $f(z)\cdot\sin\left(z^2\right)=1$ ולכן מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^{n-2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{4n+2}=1$$

כלומר: $\left(\frac{b_0}{z^2}+\frac{b_1}{z}+b_2+b_3 z+\ldots\right)\cdot\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}+\ldots\right)=1$.

מהשוואת מקדמים נקבל:

$$b_0=1$$
$$b_1=0$$
$$b_2=0$$
$$\ldots$$

כעת נשים לב כי קבלנו: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^{n-2}$, ומיחידות טור לורן, נסיק כי זהו הטור לורן של הפונקציה f בעיגול הנקוב.

לכן נסיק כי $\operatorname{Res}(f,0)=b_1=0$ (המקדם של z^{-1}).

ולכן נקבל כי: $\int_C f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,0)=0$, כלומר: $\boxed{\int_C\frac{1}{\sin\left(z^2\right)}dz=0}$.

תרגיל מס' 4

מצא וסווג נקודות סינגולריות עבור הפונקציות הבאות:

א. $f(z)=\frac{1}{z\sin z}$

ב. $g(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

ג. $h(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$

פתרון

א. נקודות הסינגולריות הן "הנקודות הבעייתיות" של הפונקציה – כלומר, הנקודות בהן המכנה מתאפס.
לכן נקודות הסינגולריות הן: $z=\pi k\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ (כלול בזה גם *z=0*).
נסמן: $g\left(z\right)=z\sin z$.
אז: $g'\left(z\right)=\sin z+z\cos z$.
עבור $k\neq 0$ נקבל: $g'\left(\pi k\right)=0+\pi k\cdot\left(-1\right)^k\neq 0$ - כלומר הנקודות $z=\pi k\neq 0$ הן <u>אפסים</u> <u>פשוטים</u> של $g\left(z\right)$, לכן עפ"י המשפט שהראנו בתזכורת נסיק כי נקודות אלו הן <u>קטבים</u> <u>פשוטים</u> של *f*.
כמו כן: $g'\left(0\right)=0$.
$g''\left(z\right)=\cos z+\cos z-z\sin z=2\cos z-z\sin z$ ולכן: $g''\left(0\right)=2\neq 0$, כלומר 0 היא <u>אפס</u> <u>מסדר שני</u> של *g* ולכן <u>קוטב מסדר שני</u> של *f*.

ב. הנקודות הבעייתיות של הפונקציה הן: $z=0, z=\frac{1}{\pi k}\left(0\neq k\in\mathbb{Z}\right)$.

עבור הנקודות $z=\frac{1}{\pi k}$, מתקיים:

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi k}}\left(z-\frac{1}{\pi k}\right)g\left(z\right)=\lim_{z\to\frac{1}{\pi k}}\frac{z-\frac{1}{\pi k}}{\sin\frac{1}{\pi k}}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{z\to\frac{1}{\pi k}}\frac{1}{\frac{1}{\pi k}\cos\frac{1}{\pi k}}=\pi k\cdot\left(-1\right)^k\neq 0$$

ולכן נסיק כי נקודות אלו הן <u>קטבים פשוטים</u> של *g*.

הנקודה $z=0$ היא אינה נקודת סינגולריות <u>מבודדת</u> - אין אף סביבה של 0 שבה *g* אנליטית, אנחנו לא נתעסק עם נקודות כאלה.

ג. במקרה זה נקודת הסינגולריות היחידה היא $z=-2$.
כעת, בשאלה מס' 1 פיתחנו את טור לורן של *h* סביב הנקודה $z=-2$ וקבלנו טור שמכיל אינסוף חזקות שליליות. לכן נסיק כי נקודה זו היא <u>סינגולריות עיקרית</u> של הפונקציה.

תרגיל מס' 5

יהיו *f,g* אנליטית בסביבת הנקודה הנקודה $z=a$ כך של-*f* יש אפס מסדר *n* ול-*g* יש אפס מסדר *m* בנקודה זו.
הוכיחו כי:

א. אם $n\geq m$ אז $h=\frac{f}{g}$ אנליטית ובעלת אפס מסדר $n-m$ בנקודה $z=a$.

ב. אם $n<m$, אז ל-$h=\frac{f}{g}$ יש קוטב מסדר $m-n$ בנקודה $z=a$.

פתרון

עפ"י הנתון, ניתן לרשום את f,g כך:

$$f(z)=(z-a)^n\tilde{f}(z)$$
$$g(z)=(z-a)^m\tilde{g}(z)$$

כאשר $\tilde{f}(a),\tilde{g}(a)\neq 0$ (לפי הגדרת האפסים).

ולכן: $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{(z-a)^n}{(z-a)^m}\cdot\dfrac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}=(z-a)^{n-m}\cdot\dfrac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$.

כאשר, $\dfrac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ אנליטית ב- $z=a$ (מנה של אנליטיות כאשר המכנה אינו מתאפס).

ולכן:

א. אם $n\geq m$, אז נקבל: $h(z)=(z-a)^d\tilde{h}(z)$, כאשר $d=n-m\geq 0$, $\tilde{h}(z)=\dfrac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ - אנליטית ולא מתאפסת בנקודה $z=a$ ולכן נסיק כי $z=a$ היא אפס מסדר $n-m$ של h.

ב. אם $n<m$ נקבל: $h(z)=\dfrac{\tilde{h}(z)}{(z-a)^d}$, כאשר $d=m-n>0$, $\tilde{h}(z)=\dfrac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ אנליטית ולא מתאפסת בנקודה $z=a$ ולכן לפי הגדרת הקוטב נסיק כי $z=a$ היא קוטב מסדר $m-n$ של h.

תרגיל מס' 6

תהי f אנליטית בעיגול המנוקב: $\{z\mid 0<|z-a|<R\}$, כך ש- $f(z)\neq 0$ לכל z בעיגול המנוקב.

חשבו את השארית $\operatorname{Res}(g,a)$ כאשר: $g(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

במקרים הבאים:

א. a הוא אפס מסדר m של f.
ב. a הוא קוטב מסדר m של f.

פתרון

א. a הוא אפס מסדר m של f ולכן: $f(z)=(z-a)^m\tilde{f}(z)$, כאשר $\tilde{f}$ אנליטית ושונה מאפס בעיגול (הלא-נקוב). לכן:

$$f'(z)=m(z-a)^{m-1}\tilde{f}(z)+(z-a)^m\tilde{f}'(z)$$

ונקבל:

$$g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=m(z-a)^{m-1}\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)}+(z-a)^m\frac{\tilde{f}'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}$$

אבל $\dfrac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}$ אנליטית בעיגול (הלא-נקוב) ולכן אינה תורמת לחלק הסינגולרי של g, כלומר נקבל:

$$\boxed{\operatorname{Res}(g,a)=m}$$

ב. a הוא קוטב מסדר m של f ולכן: $f(z)=\frac{\tilde{f}(z)}{(z-a)^m}$, כאשר g אנליטית ושונה מאפס ב-a.

לכן: $f'(z)=\frac{\tilde{f}'(z)(z-a)^m-m(z-a)^{m-1}\tilde{f}(z)}{(z-a)^{2m}}=\frac{\tilde{f}'(z)}{(z-a)^m}-\frac{m\tilde{f}(z)}{(z-a)^{m+1}}$.

ונקבל: $g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}-\frac{m}{z-a}$

$$\frac{\frac{\tilde{f}'(z)}{(z-a)^m}}{f(z)}=\frac{\frac{\tilde{f}'(z)}{(z-a)^m}}{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-a)^m}}=\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} \qquad \frac{\frac{m\tilde{f}(z)}{(z-a)^{m+1}}}{f(z)}=\frac{\frac{m\tilde{f}(z)}{(z-a)^{m+1}}}{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-a)^m}}=\frac{m}{z-a}$$

כאשר, גם כאן: $\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}$ אנליטית ולכן לא תורמת לחלק הסינגולרי של הפונקציה, ונסיק כי:

$$\boxed{\operatorname{Res}(g,a)=-m}.$$

תרגיל מס' 7

נתון: f שלמה ומקיימת - $|f(z)|\le|e^z-1|$ לכל z.

צ"ל: $f(z)=c(e^z-1)$ (c קבוע המקיים: $|c|\le 1$).

פתרון

נגדיר את הפונקציה הבאה: $g(z)=\frac{f(z)}{e^z-1}$ בתחום- $\mathbb{C}\setminus\{2\pi ik\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

נשים לב כי בסביבה של כל נקודה $z=2\pi ik$ מתקיים: $|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|e^z-1|}\le 1$, כלומר g חסומה בסביבת כל נקודת סינגולריות שלה.
ולכן נסיק כי כל נקודות הסינגולריות הן <u>סליקות</u>.
כלומר, ניתן להגדיר:

$$\tilde{g}(z)=\begin{cases} g(z) & z\ne 2\pi ik \\ w_k & z=2\pi ik \end{cases}$$

כך ש- $\tilde{g}$ <u>שלמה</u>, וכיוון שהיא רציפה ובסביבה של כל $z=2\pi ik$ היא חסומה ע"י 1, אז גם מתקיים גם: $|w_k|\le 1$.

כלומר, $\tilde{g}$ שלמה וחסומה ($|\tilde{g}(z)|\le 1$ לכל z) ולכן עפ"י משפט ליוביל נסיק כי $\tilde{g}$ <u>קבועה</u>.

כלומר $\tilde{g}(z)=c$, כאשר חייב להתקיים $|\tilde{g}(z)|=|c|\le 1$.

כעת עבור כל $z\ne 2\pi ik$ נקבל $|c|\le 1$, $c=\tilde{g}(z)=g(z)=\frac{f(z)}{e^z-1}$ כלומר: $f(z)=c(e^z-1)$.

עבור $z=2\pi ik$ נקבל עפ"י הנתון: $\left|f\left(2\pi i\right)\right|\le\left|e^{2\pi ik}-1\right|=0$, כלומר:
$f\left(2\pi ik\right)=0=c\left(e^{2\pi ik}-1\right)$, ולכן השויון מתקיים לכל z – **מש"ל.**

תרגיל מס' 8

תהי $f\left(z\right)=\frac{g\left(z\right)}{h\left(z\right)}$ כאשר h,g אנליטית ב- α, $h\left(\alpha\right)=0,h'\left(\alpha\right)\neq 0$.

הוכיחו כי: $\operatorname{Res}\left(f,\alpha\right)=\frac{g\left(\alpha\right)}{h'\left(\alpha\right)}$.

פתרון

נניח כי $g\left(\alpha\right)\neq 0$:

כיוון ש- $h\left(\alpha\right)=0,h'\left(\alpha\right)\neq 0$ נסיק כי α היא אפס פשוט של המכנה, ולכן לפי המשפט שראינו קודם, α היא קוטב פשוט של f. לכן עפ"י הנוסחא שראינו בתזכורת, נקבל:

$$\operatorname{Res}\left(f,\alpha\right)=\lim_{z\to\alpha}\left(z-\alpha\right)f\left(z\right)=\lim_{z\to\alpha}\left(z-\alpha\right)\frac{g\left(z\right)}{h\left(z\right)}=\lim_{z\to\alpha}\frac{g\left(z\right)}{\frac{h\left(z\right)-h\left(\alpha\right)}{z-a}}=\frac{g\left(\alpha\right)}{h'\left(\alpha\right)}$$

כעת, נניח כי α היא אפס מסדר m של g, אז את g,h ניתן לרשום כך:

$$g\left(z\right)=\left(z-\alpha\right)^{m}\tilde{g}\left(z\right)$$
$$h\left(z\right)=\left(z-\alpha\right)\tilde{h}\left(z\right)$$

כאשר $\tilde{g},\tilde{h}$ אלניטיות ולא מתאפסות בסביבה של α.

ולכן נקבל לכל $z\neq\alpha$:

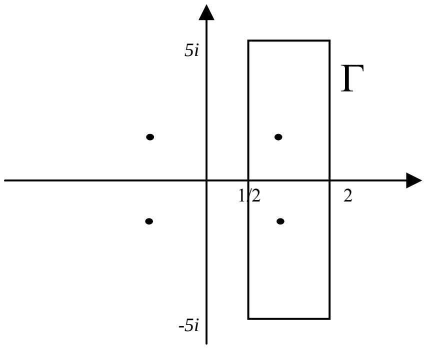
$$f\left(z\right)=\frac{\left(z-\alpha\right)^{m}\tilde{g}\left(z\right)}{\left(z-\alpha\right)\tilde{h}\left(z\right)}=\left(z-\alpha\right)^{m-1}\frac{\tilde{g}\left(z\right)}{\tilde{h}\left(z\right)}$$

כלומר, קיבלנו שבסביבת הנקודה α, f מתלכדת עם פונקציה שהיא אנליטית ב- α, ולכן בהכרח α היא נקודת סינגולריות סליקה של f.

כיוון שכך, נסיק כי $\operatorname{Res}\left(f,\alpha\right)=0=\frac{g\left(\alpha\right)}{h'\left(\alpha\right)}$.

תרגיל מס' 9

חשבו את: $\int\limits_{\Gamma}\frac{dz}{1+z^{4}}$, כאשר Γ הוא הקונטור הבא:



פתרון

נקודות הסינגולריות של הפונקציה $f\left(z\right)=\dfrac{1}{1+z^4}$ הן: $e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}i}$.

מתוכן, רק הנקודות: $z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},z_2=e^{-\frac{\pi}{4}i}$ נמצאות בתוך Γ. ולכן עפ"י משפט השארית:

$$\int_\Gamma f\left(z\right)dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(f,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)+\operatorname{Res}\left(f,e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)\right)$$

כעת:

$$\operatorname{Res}\left(f,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)=\left.\frac{1}{\left(1+z^4\right)'}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}}=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}}=\frac{1}{4}e^{\frac{-3\pi}{4}i}$$

לפי תרגיל מס' 8

$$\operatorname{Res}\left(f,e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{-\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

ולכן נקבל:

$$\boxed{\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^4}=2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}+\frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)=\frac{\pi i}{2}\cdot 2\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}}$$

תרגיל מס' 10

חשבו את האינטגרל: $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{\left(1-z\right)^2}dz$.

פתרון

בתוך המעגל $\left\{z\,|\,|z|=2\right\}$ נקודת הסינגולריות היחידה של האינטגרנד $f\left(z\right)=\dfrac{ze^{\frac{1}{1-z}}}{\left(1-z\right)^2}$ היא $z=1$.

ולכן לפי משפט השארית: $\displaystyle\int_{|z|=2}f\left(z\right)dz=2\pi i\operatorname{Res}\left(f,1\right)$.

במקרה זה נקודת הסינגולריות היא עיקרית, ולכן נאלץ להשתמש בטור לורן על מנת לחשב את השארית:

נזכר כי: $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, ולכן: $e^{\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n}}{n!}=\left(1+(z-1)^{-1}+\frac{(z-1)^{-2}}{2!}+\frac{(z-1)^{-3}}{3!}+\dots\right)$.

כמו כן: $z=(z-1)+1$, ולכן נקבל:

$$f(z)=\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{(1-z)^2}=\frac{(z-1)}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n}}{n!}+\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n}}{n!}=$$

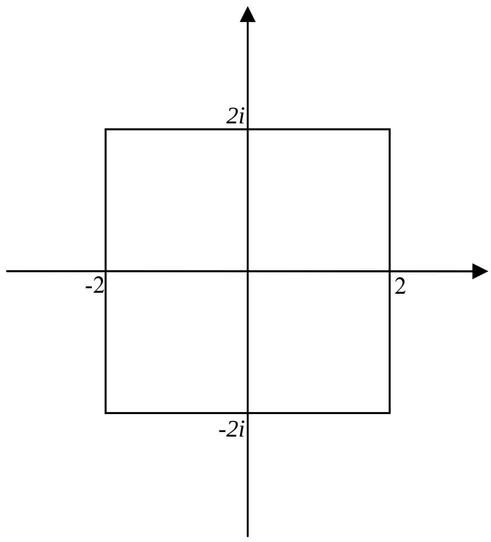
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n-1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n-2}}{n!}=\left((z-1)^{-1}+\frac{(z-1)^{-2}}{2!}+\dots\right)+\left((z-1)^{-2}+\dots\right)$$

השארית היא המקדם של $(z-1)^{-1}=\frac{1}{z-1}$, ולכן נסיק כי: $\operatorname{Res}(f,1)=1$.

ולסיכום: $\boxed{\int_{|z|=2} f(z)\,dz=2\pi i}$.

תרגיל מס' 11

חשבו את האינטגרל: $\int_{\Gamma}\frac{\sin z}{(z+1)^3}dz$, כאשר Γ היא הריבוע:



פתרון

נקודת הסינגולריות היחידה של האינטגרנד היא $z=-1$ והיא נמצא בפנים של Γ, לכן:

$$\int_{\Gamma}\frac{\sin z}{(z+1)^3}dz=2\pi i\operatorname{Res}(-1)$$

כעת נשים לב כי בנקודה $z=-1$ המונה אינו מתאפס, בעוד שלמכנה יש אפס מסדר 3.
לכן נסיק כי $z=-1$ היא <u>קוטב מסדר 3</u> של האינטגרנד, ולכן לחישוב השארית נשתמש בנוסחא ה"מסובכת" $\operatorname{Res}(f,\alpha)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-\alpha)^m\right)\right]$ ונקבל:

$$\operatorname{Res}(-1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\left[\frac{d^2}{dz^2}\sin z\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}(\sin z)''=-\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\sin z=-\frac{1}{2}\sin(-1)=\frac{\sin 1}{2}$$

ולסיכום: $\boxed{\int_\Gamma \frac{\sin z}{(z+1)^3}dz=2\pi i\cdot\frac{\sin 1}{2}=\pi i\sin 1}$

תרגיל מס' 12

חשבו את האינטגרל: $\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$

פתרון

נקודות הסינגולריות של האינטגרנד הן: $z_1=0, z_2=\frac{\pi}{2}$, ושתיהן בתוך המעגל $\{z\,|\,|z|=2\}$.

כעת:

$$\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}=1\cdot\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

כלומר הגבול בנקודה $z_1=0$ קיים ולכן זוהי נקודת סינגולריות <u>סליקה</u>, ובהתאם: $\operatorname{Res}(0)=0$.

בנקודה $z_2=\frac{\pi}{2}$ המונה לא מתאפס ואילו למכנה יש אפס מסדר שני. לכן נסיק כי $z_2=\frac{\pi}{2}$ היא קוטב מסדר שני של האינטגרנד, נשתמש בנוסחא ונקבל:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin z}{z}\right)'=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}=\frac{-1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{-4}{\pi^2}$$

ולסיכום נקבל: $\boxed{\int_{|z|=2}\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\pi i\cdot\frac{-4}{\pi^2}=-\frac{8i}{\pi}}$