פתרון תרגיל 1

5 במרץ 2019

1. כידוע, יש $n!$ אפשרויות לסדר n אנשים על ספסל.

(א) כמה אפשרויות יש לסדר n אנשים סביב שולחן עגול?

(ב) כמה אפשרויות יש לסדר 16 אנשים כך ש־ 6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר סביב שולחן עגול אחר?

(ג) כמה אפשרויות יש לסדר 16 אנשים כך ש־ 6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר על ספסל?

פתרון:

א. מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל הוא $(n-1)!$: נשים לב שכל סידור במעגל "טומן" n סידורים בשורה, כי ניתן לחתות את המעגל ולהופכו לשורה מימין לכל אחד מהיושבים, ולקבל שורה אחרת (בשורה יש משמעות ל"מי אחרון בשורה", מה שאין כן במעגל). לכן מספר הסידורים במעגל הוא $(n-1)! = \frac{n!}{n}$.

פורמאלית: נוכל להגדיר יחס שקילות על הסידורים השונים בשורה ע"י: שני סידורים שונים שקולים אמ"ם כשמחברים את הקצוות והופכים למעגל הם זהים. נקבל שגודל כל מחלקת שקילות היא n, ולכן קבוצת המנה, שהיא כמות הסידורים במעגל, היא מגודל $(n-1)! = \frac{n!}{n}$.

ב. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר במעגל. כלומר יש $\binom{16}{6}5!9!$ אפשרויות להושבת האנשים.

הערה: שימו לב שניתן לבחור תחילה את 10 האנשים שישבו בשולחן השני, והתוצאה זהה כי $\binom{16}{10} = \binom{16}{6}$.

ג. מספר הדרכים לסדר n אנשים בשורה הוא $n!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר בשורה. כלומר יש $\binom{16}{6}5!10!$ אפשרויות להושבת האנשים.

2. מחלקת אבטחת מידע דרשה שסיסמאות המחשב תהיינה מורכבות מ־6 ספרות (מתוך 10 אפשריות) ו־12 אותיות (מתוך 52 אותיות האנגלית, גדולות וקטנות). כמה סיסמאות ניתן להרכיב?

פתרון: ראשית, נבחר את מיקום הספרות, יש לכך $\binom{18}{6}$ אפשרויות. כעת, יש 10^6 אפשרויות לחלק של הספרות ו 52^{12} לחלק של האותיות. סה"כ

$$\binom{18}{6} \cdot 10^6 \cdot 52^{12}$$

אפשרויות.

3. ועדת פרס רוצה לחלק סכום של $10,000$ ש"ח בין 10 זוכים. כמה אפשרויות עומדות לרשות הועדה, אם הפרסים בשקלים שלמים, וכל זוכה מקבל סכום גדול מאפס.

פתרון:

ראשית, ניתן לכל זוכה שקל, כדי לקיים את התנאי שכל זוכה מקבל. כעת, נוכל להסתכל על הזוכים כ"תאים", ואנחנו צריכים לפזר 9990 שקלים (זהים, כמובן) ל־10 תאים. זו בחירה של 9990 תאים מתוך עשרת התאים שישנם, עם חזרה (כן, מותר שזוכה יקבל שני שקלים ואף יותר), ובלי חשיבות לסדר (השקלים זהים). נקבל, לפי הנוסחא:

$$\binom{10-1+9990}{9990} = \binom{9999}{9990}$$

4. תהי A קבוצה מגודל n, ויהי R יחס סדר מלא (ליניארי) מעל A (כלומר, $R \subseteq A \times A$ רפלקסיבי, אנטי־סימטרי, טרנזיטיבי, ולינארי). חשבו את $|R|$.

פתרון:

ראשית היחס רפלקסיבי, ולכן לכל $a \in A$ נקבל aRa, וזה נותן לנו n איברים. בנוסף, לכל $a \neq b \in A$, בדיוק אחד מהזוגות $(a,b),(b,a)$ נמצא (הוא מלא לכן לפחות אחד מהם נמצא, והוא אנטי־סימטרי ולכן לא יכול להיות ששניהם נמצאים. לכן בדיוק אחד). ולכן צריך להוסיף את כל הזוגות האפשריים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה, ויש $\binom{n}{2}$ כאלה. סה"כ:

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

5. בכיתה יש שתי שורות, ובכל שורה 8 כיסאות. יש 14 סטודנטים בכיתה, מתוכם: חמישה מסויימים צריכים לשבת בשורה הראשונה, וארבעה מסויימים בשורה השנייה. היתר יכולים לשבת בכל אשר יחפצו. בכמה דרכים ניתן לסדר את הסטודנטים

בכיסאות?

פתרון:

נושיב בתחילה את הסטודנטים עם "הדרישות". נבחר 5 מקומות מתוך ה־8 שבשורה הראשונה, בלי חזרה (יש מקום לסטודנט אחד בלבד בכל כסא) ועם חשיבות לסדר (הסטודנטים שונים זה מזה), יש לכך $\frac{8!}{3!}$ אפשרויות. בדומה, נסדר את הארבעה בשורה השנייה ב־ $\frac{8!}{4!}$ אפשרויות. לשאר הסטודנטים נותר 7 מקומות, לכן צריך לבחור 5 מתוך 7 ללא חזרה ועם חשיבות לסדר, ויש לכך $\frac{7!}{2!}$. סה"כ נקבל:

$$\frac{8! \cdot 8! \cdot 7!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$$

.6

(א) בכמה דרכים ניתן לבחור קבוצה של שני מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

(ב) בכמה דרכים ניתן לבחור קבוצה של שלושה מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

פתרון:

א. צריך ששניהם יהיו זוגיים או ששניהם יהיו אי־זוגיים. לכל אפשרות יש לנו $\binom{50}{2}$ דרכים, ולכן סה"כ

$$2 \cdot \binom{50}{2}$$

ב. כאן או ששלושתם זוגיים ($\binom{50}{3}$ דרכים), או ששניים אי־זוגיים ואחד זוגי ($50 \cdot \binom{50}{2}$ דרכים). סה"כ:

$$\binom{50}{3} + 50 \cdot \binom{50}{2}$$