אינפי 2 – פתרון תרגיל 1

1.פתרון: צ"ל ש $\frac{tg(x)}{x}>1$ בקטע. לפי משפט לגרנז', לכל $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ קיימת נקודה $c\in(0,x)$ כך ש $\frac{tg(x)}{x}=\frac{tg(x)-tg(0)}{x-0}=tg'(c)$ אבל $tg'(c)=\frac{1}{\cos^2(c)}>1$ כי עבור $c\in(0,\frac{\pi}{2})$ מתקיים $|\cos c|<1$, ולכן $\frac{tg(x)}{x}>1$.

2.פתרון: נניח בשלילה שהיא לא קבועה. לכן קיימת לה 2 נקודות עליהן היא שונה כלומר $c_1,c_2\in(a,b)$ כך ש $f(c_1)\neq f(c_2)$. אבל לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $c_3\in(c_1,c_2)\subseteq(a,b)$ כך ש $0\neq\frac{f(c_1)-f(c_2)}{c_1-c_2}=f'(c_3)$ בסתירה.

3.פתרון: נפעיל משפט לגרנז' בקטעים $[a,c],[c,b]$ ונקבל נקודות ביניים x,y מתאימות כך ש:

$f'(x)=\frac{f(c)}{c-a}=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$, כי מדובר על מנת מספרים חיוביים, ונקבל גם:

$f'(y)=\frac{-f(c)}{b-c}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$.

כעת, f' גזירה בקטע (a,b) ונוכל להשתמש עבורה במשפט לגרנז' עבור הקטע $[x,y]$ ונקבל ממנו נקודה $t\in[x,y]$ כך ש: $f''(t)=\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}<0$ כנדרש וזאת מכיוון שהמונה כאן שלילי והמכנה חיובי.

4.פתרון: נוכיח!

אם מתקיים $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ או : $f'(0)=0$, סיימנו !

נניח כי לא מתקיים כך , כלומר כי מתקיים : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<1$ וגם: $f'(0)>0$.

נגדיר פונקציה : $h(x)=\sin(x)-f'(x)$. אז מתקיים $h(0)<0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, ומכיוון ש h הינה הנגזרת של הפונקציה $-\cos(x)-f(x)$, היא מקיימת את תכונת דארבו (ערך הביניים) של נגזרות בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ ועבור הערך 0 שהוא ערך בין ערכי הנגזרת בשני קצוות הקטע , נקבל שקיימת נקודה $c\in[0,\frac{\pi}{2}]$ כך ש - $h(c)=0$, וזה מה שצריך להוכיח ! .

5.פיתרון : השתמש במשפט לגרנז' עבור פונקציית ה – $arcsin$ בקטע $[0.5,0.6]$.

$0.5<c<0.6$, $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{\arcsin(0.6)-\arcsin(0.5)}{0.6-0.5}\ (*)$. קיים בנוסף : $0.25<c^2<0.36$ ולכן :

$0.64<1-c^2<0.75\ \to 0.8<\sqrt{1-c^2}<\sqrt{0.75}=\sqrt{3}\cdot0.5$.נסיק מכך שקיים :

$\frac{1}{8}>\frac{0.1}{\sqrt{1-c^2}}>\frac{1}{5\sqrt{3}}$ ובשימוש עם $(*)$ שנותן לנו : $\arcsin(0.6)=\frac{0.1}{\sqrt{1-c^2}}+\frac{\pi}{6}$, נקבל את מה שצריך .