אלגברה לינארית למורים־תרגיל בית 5

21 בדצמבר 2016

שאלה 1

קבעו אם הקבוצות הבאות ת"ל או ב"ת:

א) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון:

המטריצה המתאימה (אם נסדר את הוקטורים בקבוצה בסדר מעט שונה):

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ וכמובן שקיים רק פתרון טריביאלי. ולכן הקבוצה היא מלתי תלוייה.

ב) $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון:

המטריצה המתאימה: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ נדרג אותה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שורת אפסים ולכן קיימים אינסוף פתרונות ובפרט קיים פתרון לא טריביאלי. ולכן הקבוצה היא ת"ל.

ג) $\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

המטריצה המתאימה $\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}$ ולאחר דירוג מקבלים:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\4&2&4\\2&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\0&-2&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-2&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש שורת אפסים ולכן קיימים אינסוף פתרונות ובפרט קיים פתרון לא טריביאלי. ולכן הקבוצה היא ת"ל.

שאלה 2

האם הווקטור $\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ הוא צירוף לינארי של הווקטורים: $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}\right\}$?

פתרון:

יש לבדוק האם קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש: $\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}$

אבל זה בעצם שקול לפתור את המערכת: $\begin{pmatrix}1&2&10\\3&10&20\\1&4&5\end{pmatrix}$ ולכן נדרג אותה ונקבל:

$$\begin{pmatrix}1&2&10\\3&10&20\\1&4&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&10\\0&4&-10\\0&2&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&10\\0&0&0\\0&2&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&15\\0&0&0\\0&2&-5\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

כלומר קיבלנו שאכן קיים צ"ל שייתן לנו את מבוקשנו: $15\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2.5\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$.

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. הוכח או הפרך: $Span\{v_1, v_2\} = Span\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$?

פתרון:

הוכחה. שימו לב: על מנת להוכיח שיוויון קבוצות אתם צריכים להראות הכלה הפוכה. כלומר לקחת איבר מהקבוצה A ולהראות ששייך לקבוצה B וכן להיפך.

גם כאן נעשה זאת:

כיוון ראשון:

יש לוכיח $sp\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\} \supseteq sp\{v_1, v_2\}$. נתון $v \in sp\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$. כלומר, קיימים סקלרים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ כך ש־$v = \alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1 - v_2)$.

נפתח את הסוגריים ונקבל: $v = (\alpha + \beta)v_1 + (\alpha - \beta)v_2$. כלומר בעצם קיבלנו שניתן להביע את הווקטור כצ"ל של הווקטורים v_1, v_2ולכן סה"כ קיבלנו $sp\{v_1, v_2\} \supseteq sp\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$.

כיוון שני:

$sp\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\} \subseteq sp\{v_1, v_2\}$. נתון $v \in sp\{v_1, v_2\}$. קיימים סקלרים $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ כך ש $v = \alpha v_1 + \beta v_2$. אנחנו מחפשים סקלרים $\gamma, \delta \in \mathbb{F}$ כך ש־$v = \alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma(v_1 + v_2) + \delta(v_1 - v_2)$.

כלומר אם נפתח את הסוגריים נקבל: $\alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_1 + \gamma v_2 + \delta v_1 - \delta v_2$ לאחר כיווץ איברים דומים נקבל מערכת משוורות הבאה:

$$\begin{cases}\delta+\gamma=\alpha\\ \gamma-\delta=\beta\end{cases}.$$

לאחר כמה פעולות נקבל $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\delta=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

נחזור למשוואה ונקבל

$$v=\alpha v_1+\beta v_2=\gamma\left(v_1+v_2\right)+\delta\left(v_1-v_2\right)=\frac{\alpha+\beta}{2}\left(v_1+v_2\right)+\frac{\alpha-\beta}{2}\left(v_1-v_2\right).$$

המשמעות היא כי מצאנו שניתן להביע את הווקטור $v=\alpha v_1+\beta v_2$ כצי"ר של הוקטורים $\left(v_1-v_2\right)$ $\left(v_1+v_2\right)$ ולכן סה"כ הוכחנו גם את $sp\left\{v_1,v_2\right\}\subseteq sp\left\{v_1+v_2,v_1-v_2\right\}$ והזה

סיימנו.

שאלה 4

יהא $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{R}$:

מצא לאילו ערכי a הקבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}2&a\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\1&2a-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&a\\1&1\end{pmatrix}\right\}\subset V$ בלתי תלויים?

פתרון:

נתאים לכל מטריצה וקטור מתאים ונשים את הוקטורים כעמודות מטריצה:

$$\begin{pmatrix}2&2&4\\a&3&a\\1&1&1\\1&2a-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\a&3&a\\2&2&4\\1&2a-5&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3-a&0\\0&0&2\\0&2a-6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3-a&0\\0&2a-6&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3-a&0\\0&2a-6&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3-a&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

אם $a=3$ אזי $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ הוקטורים יהיו ת"ל.

אם $a\neq 3$ אזי $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ווקטורים יהיו בת"ל

שאלה 5

נניח ש־$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$בת"ל. לאילו ערכים של הפרמטר $\lambda\in\mathbb{F}$, הקבוצה $\{v_1-\lambda v_2, v_2-\lambda v_3, ..., v_n-\lambda v_1\}$ בת"ל?

פתרון:

יהי צירוף לינארי מתאפס :

$$\alpha_1\left(v_1-\lambda v_2\right)+\alpha_2\left(v_2-\lambda v_3\right)+\cdots+\alpha_n\left(v_n-\lambda v_1\right)=0$$

נארגן מחדש לפי הווקטורים מקוריים ונקבל:

$$\left(\alpha_1-\lambda\alpha_n\right)v_1+\left(\alpha_2-\lambda\alpha_1\right)v_2+\cdots+\left(\alpha_n-\lambda\alpha_{n-1}\right)v_n=0.$$

כיוון ש־$\{v_1, ..., v_n\}$ בת"ל, נקבל את המשוואות:

$$\begin{cases}\alpha_1-\lambda\alpha_n=0\\ \alpha_2-\lambda\alpha_1=0\\ \vdots\\ \alpha_n-\lambda\alpha_{n-1}=0\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}\alpha_1-\lambda\alpha_n=0\\ \alpha_2-\lambda\alpha_1=0\\ \vdots\\ \alpha_n-\lambda\alpha_{n-1}=0\end{cases}$$

לכן נקבל $\alpha_1=\lambda\alpha_n=\lambda^2\alpha_{n-1}=\lambda^3\alpha_{n-2}=\cdots=\lambda^n\alpha_1$

אם $\alpha_1=0$, נקבל את צירוף הלינארי הטריוויאלי. לכן נניח $\alpha_1\neq 0$, נחלק בו וקבל $\lambda^n=1$ ולכן הקבוצה שלנו היא בת"ל אם ורק אם $\lambda^n=1$.

שאלה 6

יהי $V=\mathbb{R}_3\left[x\right]$ מעל $\mathbb{R}$, ויהי

$$S=\left\{p_1=1+x+x^2+x^3, p_2=-1+x^2, p_3=1-x+x^2-x^3\right\}$$

א) האם $1 \in Span\{S\}$

ב) מצא $Span(S)$ (אלו תנאים $p = a + bx + cx^2 + dx^3$ חייב לקיים?)

ג) האם S היא בת"ל?

שאלה 7

נתון מרחב וקטורי כלשהוא V מעל $\mathbb{F}$ ונתונים 3 וקטורים בת"ל $v_1, v_2, v_3 \in V$, האם הוקטורים $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ הם תלויים לינארית?

פתרון:

השאלה היא האם קיימים סקלרים $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ שכולם שונים מ־0 כך ש: $\alpha(v_1 + v_2) +$ $\beta(v_2 + v_3) + \gamma(v_1 + v_3) = 0$?

נפתח סוגריים ונקבץ איברים דומים ונקבל: $(\alpha + \gamma) v_1 + (\alpha + \beta) v_2 + (\beta + \gamma) v_3 = 0$.

אבל הרי אנחנו יודעים ש־v_1, v_2, v_3 הם בת"ל (כלומר קיים רק צירוף לינארי טריביאלי שנותן את וקטור ה־0) ולכן זה אומר ש:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

ומכן לאחר פתרון של מערכת משוואות נקבל ש:

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ מה שאומר שגם $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ הם בת"ל.