תרגיל 7-אלגברה לינארית למורים-פתרון

שאלה 1

יהי R^3 מרחב וקטורי מעל R.
עבור אילו ערכים של m וקטור v שייך לתת- מרחב הנפרש על ידי הוקטורים v_1 ו- v_2?
מצא את הצירוף הלינארי המבטא את v.

$$v_2=(3,2,0), v_1=(2,1,-m), v=(m,-1,-2)$$

פתרון:

כדי ש-v יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, צריך שיתקיים:

$$\begin{pmatrix} m \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix}$$

ולכן נשים במטריצה ונפתור.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & m \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -m & -2 \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & m+1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -m & -2 \end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & m+1 \\ 0 & -1 & -2m-3 \\ 0 & -m & -2 \end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-mR_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & m+1 \\ 0 & -1 & -2m-3 \\ 0 & 0 & 2m^2+3m-2 \end{array}\right)$$

כדי שלא נקבל שורת סתירה וכדי שהוא באמת יהיה צירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים, נדרוש ש: $2m^2+3m-2=0$. ולכן נקבל: א $m=\frac{1}{2}$ ו $m=-2$.

מכאן נקבל עבור $m=\frac{1}{2}$: $\alpha=-2.5, \beta=4$. ולכן הצירוף הלינארי הוא:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=-2.5\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

ועבור $m=-2$: $\alpha=0, \beta=-1$. ולכן הצירוף הלינארי הוא: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}-1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

שאלה 2

קבע לאילו ערכי הפרמטר הממשי a הקבוצה הבאה בלתי תלויה לינארית? נמק.

$$\left\{\begin{pmatrix} -3+a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ a-4 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2a-1 \end{pmatrix}\right\}$$

פתרון

נכניס למטריצה ונבדוק עבור אילו ערכים a לא נקבל שורת אפסים.

$$\begin{pmatrix} -3+a & 2 & 1 \\ 1 & a-4 & -1 \\ -2 & 5 & 2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3+2R_2]{R_1 \leftarrow R_1-(-3+a)R_2} \begin{pmatrix} 0 & -a^2+7a-10 & a-2 \\ 1 & a-4 & -1 \\ 0 & 2a-3 & 2a-3 \end{pmatrix}$$

ולכן עבור a=1.5 נקבל שורה שמתאפסת ולכן נדרוש $a \neq 1.5$.

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3/(2a-3)} \begin{pmatrix} 0 & -a^2+7a-10 & a-2 \\ 1 & a-4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1-(-a^2+7a-10)R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2-6a+8 \\ 1 & a-4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן כדי שלא יתקבל שורת אפסים, והוקטורים היו בת"ל, נדרוש ש: $a^2-6a+8 \neq 0$ וגם . ולכן

$a \neq 1.5,2,4.$

שאלה 3

בדוק האם הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים. אם לא, מצא איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש

$$.\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} span\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\}$$

הדרכה: ברור ש- span שייך R^3 (למה?) . בדקו האם כל וקטור מ- R^3 נמצא ב- span

בחרו וקטור כללי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ובדקו האם הוא שייך ל-span לכל a,b,c .

פתרון:

כדי לבדוק אם הנפרש שווה ל-R^3, נקח וקטור כלשהו ב-R^3, וננסה להציג אותו כצירוף לינארי של שאר וקטורי הקבוצה הנתונה.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. נעביר למטריצה ונדרג.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & a \\ 0 & 1 & 5 & b \\ 4 & 0 & 12 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & a \\ 0 & 1 & 5 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a \end{array}\right)$$

ולכן קיבלנו שכאשר: $c-2a \neq 0$ אזי נקבל שורת סתירה. ולכן הוקטורים לא פורשים את R^3., כגון הם לא פורשים את הוקטור: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

שאלה 4

הוכח/הפרך:

א) אם u,v,w ת"ל, אז $sp\{u,w\} = sp\{u,v\}$

ב) אם $\{u,v,w\}$ הם כאלה שכל שניים מהם הם בת"ל אז גם $\{u,v,w\}$ בת"ל.

פתרון:

א) אם u,v,w ת"ל, אז $sp(u,w)=sp(u,v)$.

<u>פיתרון:</u> הטענה לא נכונה. למשל עבור:

$$v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow sp\{u,v\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\right\}\neq\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=sp\{u,w\}$$

גם עבור בחירה של $u=0$ ו- w,v בת"ל כלשהם, זו תהיה דוגמא נגדית.

ב) אם $\{u,v,w\}$ הם כאלה שכל שניים מהם הם בת"ל, אז גם $\{u,v,w\}$ בת"ל.

<u>פיתרון:</u> הטענה לא נכונה. למשל נבחר:

$$v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

קל לוודא שכל זוג וקטורים הוא בת"ל, אבל שלושתם יחד הם ת"ל, למשל עבור הצירוף הלינארי הבא:

$$1\cdot v+1\cdot u-1\cdot w=0$$

שאלה 5

הוכיחו את הטענה הבאה:

יהי $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה בת"ל אז הקבוצה $L_2=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ בת"ל כאשר $u_i=v_1+v_2+\ldots+v_i$

פתרון. יהיו $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, כך ש-

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_nu_n=0$$

לכן

$$\alpha_1(v_1)+\alpha_2(v_1+v_2)\ldots+\alpha_n(v_1+v_2+\ldots+v_n)=0$$
$$\Downarrow$$
$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)v_1+(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)v_2+(\alpha_3+\ldots+\alpha_n)v_3\ldots+\alpha_nv_n=0$$

ידוע ש- $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ לכן הצ"ל חייב להיות 0 כלומר

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n&=&0\\\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n&=&0\\\alpha_3+\ldots+\alpha_n&=&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\\alpha_n&=&0\end{cases}$$

ומכאן

$$\begin{cases}\alpha_1&=&0\\\alpha_2&=&0\\\alpha_3&=&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\\alpha_n&=&0\end{cases}$$

כלומר בצ"ל היחידי שמאפס את $L_2=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ הוא הצ"ל הטריוואלי ולכן היא בת"ל

שאלה 6

1. האם הווקטור $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב הנפרש על ידי

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

, ואם כן מצא את הצירוף הלינארי המתאים לו.

2. מהסעיף הקודם הסק את הפתרון למערכת

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \end{cases}$$

פתרון:

פתרון. אנחנו מחפשים α, β, γ , כך ש-

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

לכן $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{4}$ לכן בסה"כ

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. כעת אנחנו מחפשים x, y, zכך ש-

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

זאת אותה מערכת משוואות! ולכן בפתרון שלה זהה $x = y = z = \frac{1}{4}$