חישוב שטח k מימדי של מקבילון:

נניח שנתונים הוקטורים $v_1,...,v_k \in \Re$. תכולתו של המקבילון שהם פורשים ב $\Re^n$ היא כמובן 0.
אבל, כיון שהם פורשים מרחב k מימדי בתוך $\Re^n$, יש לנו עניין בנפח (או השטח) שהם תופסים בתוך מרחב זה.
לשם כך, נמצא בסיס אורתונורמלי, $\{u_1,...,u_k\}$ עבור המרחב ה k מימדי, V , שפורשים הוקטורים $v_1,...,v_k$.

נגדיר העתקה לינארית $T:V\to\Re^k$ ע"י קביעתה על הבסיס האורתונורמלי, כך: $T(u_i)=e_i$
כאשר e_i הם איברי הבסיס הסטנדרטי של $\Re^k$ ($i=1..k$).
כעת, נגדיר את השטח ה k מימדי של המקבילון שנוצר ע"י הוקטורים $v_1,...,v_k$ להיות:

$$vol_k(P(v_1,...,v_k)) = v(P(T(v_1),...,T(v_k))\ .$$

את אגף ימין של הביטוי האחרון מחשבים כרגיל, בעזרת הערך המוחלט של הדטרמיננטה של המטריצה שעמודותיה $T(v_1),...,T(v_k)$. (שימו לב, זוהי מטריצה ריבועית).

דרך זו קצת סבוכה. בשעור אנו מראים שיש דרך נוספת:

משפט:
אם A היא המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים $v_1,...,v_k$ אז $vol_k(P(v_1,...,v_k)) = \sqrt{\det(A^T A)}$.

דוגמא:

יהיו $v_1=(0,0,1), v_2=(3,4,0)\in\Re^3$. נמצא את השטח הדו מימדי של המקבילית שנפרשת ע"י שני הוקטורים האלה בשתי שיטות.

תחילה, לפי ההגדרה: שני הוקטורים פורשים תת מרחב דו מימדי בתוך $\Re^3$. זהו המרחב $V=Sp\{(0,0,1),(3,4,0)\}$. נמצא בסיס אורתונורמלי עבור מרחב זה:

נקח $u_1=(0,0,1)$. $u_2=\frac{1}{5}(3,4,0)$. (שימו לב, במקרה (או אולי לא כל כך במקרה...) שני הוקטורים נבחרו אורתוגונלים זה לזה כך שהיה מספיק לנרמל אחד מהם (השני כבר הגיע אורתונורמלי), לא תמיד זה המצב.
כעת נגדיר העתקה לינארית $T:V\to\Re^2$ בעזרת הבסיס האורתונורמלי כך: $T(0,0,1)=(1,0)$ ו $T(\frac{1}{5}(3,4,0))=(0,1)$.
נבדוק לאן העתקה זו לוקחת את הוקטורים שמהווים צלעות המקבילית:

$$T(v_1)=T(0,0,1)=(1,0)$$
$$T(v_2)=T(3,4,0)=T(0\cdot u_1+5u_2)=5T(u_2)=(0,5)$$

כעת, יש לנו שני וקטורים ב $\Re^2$: $T(v_1)=(1,0), T(v_2)=(0,5)$ והשטח של המקבילית שהם יוצרים הוא $\left|\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\right|=5$. על פי ההגדרה, שטח זה הוא השטח של המקבילית שנפרשת ע"י v_1, v_2 .

בדרך השניה, זה הרבה יותר פשוט, כמובן :

נסמן $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$. אז $A^T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ ולכן

$$\sqrt{\det(A^TA)}=\sqrt{\det\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}\right)}=\sqrt{\det\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 50\end{pmatrix}}=5$$