מד"ר תרגול 4, סמסטר א' 2014

10 בנובמבר 2013

הערה:

הפיתרון של משוואות מדויקות הוא מהצורה g(x,y)=c ולא $g(x,y)=y$ כמו שנכתב בשבוע שעבר.

הורדת סדר המשוואה

נתונה שוואה מהצורה $F(y\prime,y,x)=0$ או $F(y\prime\prime,y\prime,y,x)=0$ ונרצה להוריד את סדר המשוואה. נתחיל עם המקרה הראשון ונסמן $p=y\prime$: $F(p,y,x)=0$. נחלק למקרים:

מקרה א':

פתירה עבור p, ננסה להציג את המשוואה בצורת מכפלה $(p-F_1)\cdot(p-F_2)\dots(p-F_n)=0$
פותרים כל גורם בנפרד והפתרון הוא המכפלה של הפתרונות: $f_1(x,y,c)\cdot f_2(x,y,c)\cdots f_n(x,y,c)$
כאשר $f_i=y-g_i(x,c)$ ו־g_i הוא פתרון של $p-F_i=0$.

תרגיל: $p^4-(x+2y+1)p^3+(x+2y+2xy)p^2-2xyp=0$

פתרון:

$$\underbrace{p(p^3-(x+2y+1)p^2+(x+2y+2xy)p-2xy)}_{p=1\text{ fulfills the equialation}} = 0$$

אז נשתמש בחלוקת פולינומים ב$p-1$ ונקבל:

$$p(p-1)(p-x)(p-2y)=0$$

נפתתור כל גורם בנפרד:

$$\begin{array}{cccc} p=0 & p=1 & p=x & p=2y \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ F_1=c_1 & F_2=x+c_2 & F_3=\frac{x^2}{2}+c_3 & F_4=e^{2x}\cdot c_4 \end{array}$$

כעת,

$$\begin{array}{c} p=0 \\ \Downarrow \\ y\prime=0 \\ y=c_1 \quad \Rightarrow \quad g_1(y,c_1)=y-c_1 \\ \Downarrow \\ f_1=c_1 \end{array}$$

ובאופן דומה:

$$\begin{array}{c} p=1 \\ \Downarrow \\ y\prime=1 \\ \Downarrow \\ y=x+c_2 \\ \Downarrow \\ g_2=y-x-c_2 \\ \Downarrow \\ f_2=x+c_2 \end{array}$$

לכן, הפתרון יהיה מהצורה:

$$(y-c)(y-x-c)(2y-x^2+c)(y-ce^{2x})=0$$

מקרה ב':

אם נתונה משוואה מהצורה $y=f(x,p)$ אז נגזור את המשוואה ביחס לx ונקבל $p=y\prime=$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=F(x,p,p\prime)$. משתמשים בחזרה במשוואה המקורית.

תרגיל: $y=xp^2$

פתרון: גוזרים לפי x:

$$\begin{aligned} p &= y\prime=p^2+2xp\cdot p\prime \\ 1 &= p+2xp\prime \\ p\prime+\frac{1}{2x}p &= \frac{1}{2x} \\ p(x) &= e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left(\int\frac{1}{2x}e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+c\right) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

וחוזרים לy ע"י אינטגרציה ל$p(x)=y\prime$

מקרה ג':

נתון $x=f(,y,p)$. גוזרים ביחס לy וממשיכים בדומה למקרה ב'.

מקרה ד':

משוואת קלרו:בהנתן משוואה מהצורה $y=px+f(p)$ אזי הפתרון הכללי הוא $y=cx+f(c)$.

תרגיל: פתור $16x^2+2(y\prime)^2y-(y\prime)^3x=0$.

פתרון: מטרה: להוריד את סדר הנגזרות. נסמן $y\prime=p$ ונקבל:

$$\begin{aligned}16x^2+2p^2y-p^3x &= 0\\ 2y &= px-16\frac{x^2}{p^2}\end{aligned}$$

אם נגזור אתהמשוואה לפי x, נקבל:

$$2p=p+p\prime x-\frac{32xp^2-32p\cdot p\prime\cdot x^2}{p^4}$$

נקבל:

$$\begin{aligned}p &= x\cdot p\prime-\frac{32x}{p}+\frac{32p\prime x^2}{p^3}\\ p &= \left(x+\frac{32x^2}{p^3}\right)p\prime-\frac{32x}{p^2}\\ p^4 &= (p^3x+32x^2)p\prime-32xp\\ p(p^3+32x)-(p^3+32x)xp\prime &= 0\\ (p-xp\prime)(p^3+32x) &= 0\end{aligned}$$

משוואה זו מתקיימת בשני מקרים:

1.

$$\begin{aligned}p-xp\prime &= 0\\ \frac{dp}{p} &= \frac{dx}{x}\\ p &= cx\end{aligned}$$

כאשר נציב במשוואה המקורית נקבל $16x^2+2c^2x^2y-c^3x^4=0$ $\Leftarrow$ $\boxed{y=\frac{c^3x^2-16}{2c^2}=\frac{cx^2}{2}-\frac{8}{c^2}}$.

2. הגורם הזה לא רלוונטי בגלל שהוא לא מכיל נגזרת. אנחנו מחפשים גורם מהצורה $F(x,p,p\prime)$ ולא $F(x,p)$.

תרגיל: $y=(2+p)x+p^2$

פתרון: נתחיל בגזירה לפי p:

$$\begin{aligned} p &= 2+p+p\prime x+2pp\prime \\ 0 &= 2+p\prime x+2pp\prime \\ -2 &= (x+2p)\cdot\frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

המשוואה הנתונה היא משוואה לינאירית/ נמצא גורם אינטגרציה

$$u(p)=\frac{M_p-N_x}{M}=\frac{0-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ולכן גורם האינטגרציה שלנו הוא $e^{0.5p}$. נכפול את המשוואה בגורם האינטגרציה.

$$2e^{0.5p}dx+(2xe^{0.5p}+4pe^{0.5p})dp=0$$

זאת משוואה מדויקת. נמצא g כך שיתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 2e^{0.5p} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 2xe^{0.5p}+4pe^{0.5p} \end{aligned}$$

לאחר חישוב נקבל שהפתרון הסופי הוא:

$$\begin{cases} y=(8-p^2+2+p)ce^{-0.5p} \\ x=2(2-p)+ce^{-0.5p} \end{cases}$$

דרך נוספת לפתרון המשוואה היה להציב

$$\begin{aligned} z &= x+2p \\ z\prime &= 1+2p\prime \\ p\prime &= \frac{z\prime-1}{2} \\ -2 &= \frac{z\prime-1}{2}-z \\ -4 &= z\prime z-z \\ z\prime z &= z-4 \\ \int\frac{z}{z-4}dz &= \int dx+c \\ z+4\ln\mid z-4\mid &= x+c \end{aligned}$$

$$\boxed{x+2p+4+\ln\mid x+2p-4\mid=x+c}$$

תרגיל : $y = 3px + 6p^2y^2$

פתרון: אנחנו נמצאים במקרה ג'.

$$x = \frac{y}{3p} - 2py^2 = f(y,p)$$

נגזור את המשוואה לפי y:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{p} &= \frac{p - \frac{dp}{dy}y}{p^2} - 12py - 6y^2\frac{dp}{dy} \\
\frac{3}{p} &= \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\cdot\frac{dp}{dy} - 6y^2\frac{dp}{dy} - 12py \\
3p &= p - y\frac{dp}{dy} - 6p^2y^2\frac{dp}{dy} - 12p^3y \\
2p + y\frac{dp}{dy} + 6p^2y^2\frac{dp}{dy} + 12p^3y &= 0 \\
2p(1+6p^2y) + \frac{dp}{dy}y(1+6p^2y) &= 0 \\
(2p + y\frac{dp}{dy})(1+6p^2y) &= 0
\end{aligned}$$

נסתכל רק על הגורם הראשון:

$$\begin{aligned}
2p + y\frac{dp}{dy} &= 0 \\
\frac{dp}{2p} &= -\frac{dy}{y} \\
p &= \frac{1}{y^2}c
\end{aligned}$$

נשאר להציב במשוואה המקורית:

$$y = \frac{3}{y^2}cx + 6\cdot\frac{1}{y^4}c^2y^2$$

$$\boxed{y^3 = 3cx + 6c^2}$$

תרגיל: $(y-px)^2 = 1+p^2$

פתרון:

$$\begin{aligned} y - px &= \pm\sqrt{1+p^2} \\ y &= px \pm \sqrt{1+p^2} \end{aligned}$$

ולכן אנחנו נמצאים במקרה ד', כלומר משוואת קלרו. אצלנו $f(p) = \pm\sqrt{1+p^2}$ ולכן הפתרון הוא

$$\boxed{y = cx \pm \sqrt{1+c^2}}$$