# תרגיל 12 – אלגברה מופשטת 1

**1.** ענו על הסעיפים הבאים:

**1.1** מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $Z_6$ ושל $Z_{25}$;

פתרון: $\varphi(8)=4, \varphi(25)=20$

**1.2** מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $Z_{25}\times Z_8$;

פתרון: 80.

**1.3** זהו את החבורה $Aut\left({}^{GL_n(Z_7)}\big/_{SL_n(Z_7)}\right)$ (לכל n>0).

פתרון: לכל שדה $F$, הגרעין של האפימורפיזם $\det: GL_n(F)\to F^*$ הוא $SL_n(F)$. לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל ש- ${}^{GL_n(F)}\big/_{SL_n(F)}\cong F^*$. בפרט, $Aut\left({}^{GL_n(Z_7)}\big/_{SL_n(Z_7)}\right)\cong Z_7^{\ *}=U_7$ וזו חבורה אבלית מסדר 6. כעת, $U_7$ היא חבורה ציקלית הנוצרת על ידי 3 (בדקו זאת!), ולכן איזומורפית ל- $Z_6$. לכן צריך למעשה למצוא את $Aut(Z_6)$.

הוכחנו בעבר ש- $Aut(Z_6)\cong U_6$.

מש"ל

**2.** תהא $G$ חבורה כך ש- $|G|=p^k$ עבור $p$ ראשוני. תהא $H\triangleleft G$ כך ש- $|H|=p$. הוכיחו באמצעות משפט ${}^N\!/_C$ כי $H\subseteq Z(G)$. (שימו לב כי כבר פתרנו את התרגיל הזה בעבר בדרך אחרת.

פתרון

מכיוון ש- $|H|=p$, $H$ היא תת חבורה ציקלית ולכן אבלית. מתקיים $|Aut(H)|=p-1$. לפי משפט ${}^N\!/_C$ קיים שיכון ${}^{N(H)}\big/_{C(H)}\to Aut(H)$. נשים לב ש- $N(H)=G$, וכן ${}^{G}\big/_{C(H)}$ היא חבורה מסדר חזקת $p$. לכן $\left|{}^{G}\big/_{C(H)}\right|=1$, מה שאומר ש- $G=C(H)$ וזה מוכיח הדרוש.

**3.** ענו על הסעיפים הבאים:

**3.1** הוכיחו $Aut(S_3)\cong S_3$.

פתרון

הוכחנו בעבר שלכל $n \geq 3$ מתקיים $Z(S_n) = \{1_{S_n}\}$. מכאן

$Inn(S_3) \cong S_3 / Z(S_3) \cong S_3$.

לכן כדי להסיק ש $Aut(S_3) \cong S_3$ מ"ל שיש לכל היותר $6$ (זהו הסדר של $S_3$)

אוטומורפיזמים (המשמעות היא שכל האוטומורפיזמים הם פנימיים).

ראינו ש- $S_3 = \langle (12),(123) \rangle$. אוטומורפיזם נתון $\varphi$ נקבע עפ"י תמונת היוצרים.

איזומורפיזם שומר על סדר איברים וישנם בדיוק שלושה איברים מסדר 2

(אלו החילופים) ב- $S_3$ ולכן ישנם לכל היותר שלושה ערכים אפשריים ל-

$\varphi(12)$. ישנם בדיוק שני איברים מסדר 3 ולכן ישנן שתי אפשרויות עבור

$\varphi(123)$. בסה"כ נקבל שיש לכל היותר $2 \cdot 3 = 6$ אוטומורפיזמים אפשריים

ונקבל הדרוש.

**3.2** חשבו את $Aut(Aut(Aut(Z_8)))$.

פתרון: $Aut(Z_8) = U_8 \cong Z_2 \times Z_2$. ראינו בתרגול כי

$Aut(Z_2 \times Z_2) \cong GL_2(Z_2) \cong S_3$ ולפי הסעיף הקודם, $Aut(S_3) \cong S_3$. לכן,

$Aut(Aut(Aut(Z_8))) \cong S_3$.

**4.** תהי $G$ חבורה ותהי $N$ תת חבורה נורמלית. הוכיחו כי המרכז $C_G(N)$ הוא תת חבורה נורמלית של $G$.

הוכחה: יהי $a \in C_G(N)$ ויהי $g \in G$. צ"ל כי $gag^{-1} \in C_G(N)$. לשם כך, יהי $n \in N$. אזי $(gag^{-1})n(gag^{-1})^{-1} = gag^{-1}nga^{-1}g^{-1} = ga(g^{-1}ng)a^{-1}g^{-1}$

מכיוון ש $N$ נורמלית, $g^{-1}ng \in N$. מכיוון ש $a \in C_G(N)$, $a(g^{-1}ng)a^{-1} = g^{-1}ng$

לכן, $(gag^{-1})n(gag^{-1})^{-1} = ga(g^{-1}ng)a^{-1}g^{-1} = g(g^{-1}ng)g^{-1} = n$ ו $gag^{-1} \in C_G(N)$

**5.** תהי $G$ חבורה מסדר 255.

**5.1** הוכיחו שיש לה איבר מסדר 17.

פתרון: $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$ לכן לפי משפט קושי יש לחבורה איבר מסדר 17.

**5.2** הראו שכל איבר מסדר 17 בחבורה הוא מרכזי (כלומר שייך למרכז $Z(G)$). רמז: השתמשו במשפט $N/C$.

הראו שכל איבר מסדר 17 בחבורה הוא מרכזי. (רמז: $N/C$). **פתרון**. יהי $x$ איבר מסדר 17, ונסמן $P = \langle x \rangle$. זוהי חבורת 17־סילו יחידה, כי האינדקס של המרנמל צריך להיות שקול ל־1 מודולו 17, ול־255 אין מחלקים לא טריוויאליים כאלה. בנוסף, $P$ ציקלית, ולכן $\mathrm{N}_G(P)/\mathrm{C}_G(P) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(P) \cong U_{17} \cong \mathbb{Z}_{16}$. מאידך $|\mathrm{N}_G(P)/\mathrm{C}_G(P)|$ מחלק את 255, ומכיוון ש־$(16, 255) = 1$, החבורה הזו טריוויאלית. לכן $\mathrm{C}_G(x) = \mathrm{C}_G(P) = \mathrm{N}_G(P) = G$.

**6.** ענו על הסעיפים הבאים:

**6.1** הוכח שאין שיכון של $S_7$ ב $A_8$.

הוכח שאין שיכון $S_7 \hookrightarrow A_8$. **פתרון**. נניח שיש שיכון כזה; נסמן את התמונה שלו ב־$H$. אז $|H| = |S_7| = 7!$ ולכן $[A_8 : S_7] = \frac{\frac{1}{2}8!}{7!} = \frac{1}{2}8 = 4$, כלומר, יש ל־$A_8$ תת־חבורה מאינדקס 4. לפי העידון של משפט קיילי, נובע מכך שיש ל־$A_8$ תת־חבורה נורמלית המוכלת ב־$H$ (ולכן היא אינה טריוויאלית), מאינדקס המחלק את $4! = 24$. אבל זה בלתי אפשרי כי $A_8$ פשוטה.

**6.2** תאר שיכון של $S_7$ ב $A_9$.

תאר שיכון $S_7 \hookrightarrow A_9$. **פתרון**. נתקן את השיכון הטבעי $S_7 \subseteq S_9$, ונגדיר $\varphi : S_7 \to A_9$ באופן הבא: אם $\sigma \in S_7$ זוגית אז $\varphi(\sigma) = \sigma$, ואחרת $\varphi(\sigma) = \sigma(89)$; מכיוון ש־$\mathrm{sgn}(\sigma(89)) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$, $\varphi$ מקבלת רק ערכים ב־$A_9$. ברור שהפונקציה הזו חד־חד־ערכית. כדי להראות שהיא הומומורפיזם, נחלק למקרים: אם $\sigma, \sigma' \in A_7$ אין מה להוכיח; אם $\sigma \in A_7$ ו־$\sigma' \notin A_7$ אז $\varphi(\sigma\sigma') = \sigma\sigma'(89) = \varphi(\sigma)\varphi(\sigma')$; אם $\sigma \notin A_7$ ו־$\sigma' \in A_7$ אז $\varphi(\sigma\sigma') = \sigma\sigma'(89) = \sigma(89)\sigma' = \varphi(\sigma)\varphi(\sigma')$ כי $(89)$ מתחלף עם כל $\sigma \in S_7$; ואם $\sigma, \sigma' \notin A_7$ $\varphi(\sigma\sigma') = \sigma\sigma' = \sigma(89)\sigma'(89) = \varphi(\sigma)\varphi(\sigma')$.

**7.** הוכיחו שלא קיימת חבורה פשוטה מסדר $400$.
הדרכה: אם יש תת חבורה 5-סילו יחידה סיימנו. הוכיחו כי אם כל שתי תת חבורות 5-סילו נחתכות באופן טרוויאלי אז ת"ח 2 סילו היא נורמלית. אם $P,Q$ תת חבורות 5-סילו הנחתכות באופן לא טרוייאלי, התבוננו בחבורה הנוצרת על ידם $\langle P,Q \rangle$.

פתרון
מתקיים $|G| = 400 = 2^4 \cdot 5^2$. לפי משפט סילו 3: $n_5 \equiv 1 \pmod 5 \wedge n_5 | 16$ ולכן $n_5 \in \{1,16\}$. אם $n_5 = 1$ סיימנו, ולכן נניח $n_5 = 16$. נתבונן בשני מקרים.
אם כל שתי תת חבורות 5– סילו נחתכות טריוויאלית (כלומר, כולן נחתכות טריויאלית) אז יש בהן $16 \cdot (25-1) = 400 - 16$ איברים ולכן נשאר מקום רק לתת חבורת 2– סילו אחת ולכן סיימנו.
במקרה השני, נניח שקיימות שתי תת חבורות 5– סילו $P,Q$ שחיתוכן אינו טרוויאלי: $|P \cap Q| = 5$. מתקיים $P \cap Q \triangleleft Q$, $P \cap Q \triangleleft P$ ולכן $P \cap Q \triangleleft \langle P,Q \rangle$.
מהו הסדר של $\langle P,Q \rangle$? מכיוון ש-$PQ \subseteq \langle P,Q \rangle$ וכן $|\langle P,Q \rangle| \,\big|\, 400$, האפשרויות הן $200, 400$ (שכן $|PQ| = 125$; שימו לב ש-$PQ$ אינה תת-חבורה). אם $|\langle P,Q \rangle| = 200$ אז סיימנו כי זו ת"ח מאינדקס 2. אחרת $|\langle P,Q \rangle| = 400$ וגם כאן סיימנו כי, כזכור, $P \cap Q \triangleleft \langle P,Q \rangle$.
אפשרות נוספת לפתרון

נתבונן במרכז של החיתוך: $C_G\left(P\cap Q\right)$. מתקיים $P,Q\subseteq C_G\left(P\cap Q\right)$ כי אלה תת חבורות אבליות. ולכן הוא מסדר שמתחלק ב-$25$ וגדול ממנו, וגם מחלק את $400$. זה משאיר את האפשרויות $50,100,200,400$; כלומר אינדקס $1,2,4,8$. אם $\left[G:C_G\left(P\cap Q\right)\right]=1$ אזי $P\cap Q$ נמצאת במרכז ולכן המרכז לא טריויאלי וסיימנו. אם $\left[G:C_G\left(P\cap Q\right)\right]=2$ אזי המרכז הוא תח"נ וסיימנו. אם $\left[G:C_G\left(P\cap Q\right)\right]=4$ אזי ניתן לשכן את $G$ ב-$A_4$ וזו סתירה (הסדרים לא מסתדרים). אם $\left[G:C_G\left(P\cap Q\right)\right]=8$ אזי $\left|C_G\left(P\cap Q\right)\right|=50$. במקרה זה תת חבורות $P,Q$ הן חבורות סילו של המרכז, והן תח"נ שלו (כי הן מאינדקס 2) ולכן יש מקום רק לאחת מהן.

בהצלחה! ☺