

האמת של הטענה המורכבת  $[(A \cdot X) \cdot (Y \vee \sim B)]$  כד: הואיל ו- $X$  שקרי, הקונדיציונציה  $A \cdot X$  היא שקרית, ולכן השלילה שלה  $\sim(A \cdot X)$  אמיתית.  $B$  היא אמיתית; לכן שלילתו,  $\sim B$ , היא שקרית, והואיל ו- $Y$  שקרית גם היא, הדיסיונציה של  $Y$  עם  $\sim B$ , כלומר  $Y \vee \sim B$ , היא שקרית. הביטוי שבסוגריים המרובעים  $[(A \cdot X) \cdot (Y \vee \sim B)]$  הוא קונדיציונציה של טענה אמיתית עם טענה שקרית, ולפיכך היא שקרית. לכן שלילתה, שהיא הביטוי בשלמותו, היא אמיתית. הליך דב-שלבי כזה מאפשר לנו תמיד לקבוע את ערך האמת של טענה מורכבת לפי ערכי האמת של רכיביה.

תרגילים

- I. איזו מן הטענות הללו היא אמיתית?
- \* 1. ושינגטון נרצח • לינקולן נרצח
2.  $\sim$ (לינקולן נרצח  $\vee$  ושינגטון נרצח)
3.  $\sim$  לינקולן נרצח  $\vee$   $\sim$  ושינגטון נרצח
4.  $\sim$ (לינקולן נרצח • ושינגטון נרצח)
- \* 5.  $\sim$ לינקולן נרצח •  $\sim$  ושינגטון נרצח
6. ושינגטון נרצח  $\vee$   $\sim$  ושינגטון נרצח
7. לינקולן נרצח •  $\sim$ לינקולן נרצח
8. (ושינגטון נרצח • לינקולן נרצח)  $\vee$  ( $\sim$ ושינגטון נרצח •  $\sim$ לינקולן נרצח)
9. (ושינגטון נרצח  $\vee$  לינקולן נרצח) • (ושינגטון נרצח •  $\sim$ לינקולן נרצח)
- \* 10. לינקולן נרצח  $\vee$  ( $\sim$ ושינגטון נרצח • לינקולן נרצח)
11. ושינגטון נרצח  $\vee$  ( $\sim$ ושינגטון נרצח • לינקולן נרצח)
12.  $\sim$ (ושינגטון נרצח •  $\sim$ לינקולן נרצח)
13.  $\sim$ ( $\sim$ לינקולן נרצח  $\vee$  ושינגטון נרצח)  $\vee$  ( $\sim$ ושינגטון נרצח •  $\sim$ לינקולן נרצח)
14.  $\sim$ ( $\sim$ ושינגטון נרצח • לינקולן נרצח) • (לינקולן נרצח •  $\sim$ לינקולן נרצח)

- \* 15.  $\sim$ (ושינגטון נרצח  $\vee$  לינקולן נרצח)  $\vee$  ( $\sim$ ושינגטון נרצח •  $\sim$ לינקולן נרצח)
16. ושינגטון נרצח  $\vee$  ( $\sim$ לינקולן נרצח • ניו יורק היא העיר הגדולה ביותר באמריקה)
17. לינקולן נרצח •  $\sim$ (לינקולן נרצח • ניו יורק היא העיר הגדולה ביותר באמריקה)
18. (ושינגטון נרצח  $\vee$  לינקולן נרצח)  $\vee$  ( $\sim$ ושינגטון נרצח •  $\sim$ ניו יורק היא העיר הגדולה ביותר באמריקה)
19.  $\sim$ ( $\sim$ לינקולן נרצח • ניו יורק היא העיר הגדולה ביותר באמריקה)  $\vee$  ( $\sim$ ושינגטון נרצח  $\vee$  ניו יורק היא העיר הגדולה ביותר באמריקה)
20.  $\sim$ ( $\sim$ לינקולן נרצח • ניו יורק היא העיר הגדולה ביותר באמריקה) • ( $\sim$ ניו יורק היא העיר הגדולה ביותר באמריקה  $\vee$  שיקגו היא העיר הגדולה ביותר באמריקה)

II. אם  $A, B, C$  הן טענות אמיתיות, ואילו  $X, Y, Z$  הן טענות שקריות, איזו מן הטענות הבאות אמיתית?

- \* 1.  $(C \vee Z) \cdot (Y \vee B)$
2.  $(A \cdot B) \vee (X \cdot Y)$
3.  $\sim(B \vee X) \cdot \sim(Y \vee Z)$
4.  $\sim(C \vee B) \vee \sim(\sim X \cdot Y)$
5.  $\sim B \vee C$
6.  $\sim B \vee X$
7.  $\sim X \vee A$
- \* 8.  $\sim X \vee Y$
9.  $\sim[(\sim B \vee A) \vee (\sim A \vee B)]$
- \* 10.  $\sim[(\sim Y \vee Z) \vee (\sim Z \vee Y)]$
11.  $\sim[(\sim C \vee Y) \vee (\sim Y \vee C)]$
12.  $\sim[(\sim X \vee A) \vee (\sim A \vee X)]$
13.  $\sim[A \vee (B \vee C)] \vee [(A \vee B) \vee C]$
14.  $\sim[X \vee (Y \vee Z)] \vee [(X \vee Y) \vee Z]$
- \* 15.  $[A \cdot (B \vee C)] \cdot \sim[(A \cdot B) \vee (A \cdot C)]$
16.  $\sim[X \cdot (\sim A \vee Z)] \vee [(X \cdot \sim A) \vee (X \cdot Z)]$
17.  $\sim\{[(\sim A \vee B) \cdot (\sim B \vee A)] \cdot \sim[(A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B)]\}$
18.  $\sim\{[(\sim C \vee Z) \cdot (\sim Z \vee C)] \cdot \sim[(C \cdot Z) \vee (\sim C \cdot \sim Z)]\}$
19.  $[A \vee (B \cdot C)] \cdot \sim[(A \cdot B) \vee (A \cdot C)]$
20.  $[B \vee (\sim X \cdot \sim A)] \cdot \sim[(B \vee \sim X) \cdot (B \vee \sim A)]$

III. בהשתמשך באותיות A, B, C, D, כדי לסמן בקיצור את הטענות הפשוטות: "ארגנטינה מגייסת", "ברזיל מכריזה אמברגו", "קובה ממשיכה לשלוח נשק לדרום-אמריקה" ו"הרפובליקה הדומיניקנית פונה לאום" — סמל את הטענות הללו:

- \* 1. ארגנטינה מגייסת ואו שברזיל מכריזה אמברגו או שקובה ממשיכה לשלוח נשק לדרום-אמריקה.
2. או שארגנטינה מגייסת או שברזיל מכריזה אמברגו או שקובה ממשיכה לשלוח נשק לדרום-אמריקה.
3. ארגנטינה איננה מגייסת אולם ברזיל מכריזה אמברגו.
4. או שארגנטינה מגייסת או שברזיל איננה מכריזה אמברגו.
- \* 5. אין זה נכון שגם ארגנטינה מגייסת וגם ברזיל מכריזה אמברגו.
6. אין זה נכון שאו שארגנטינה מגייסת או שברזיל איננה מכריזה אמברגו.
7. או שארגנטינה מגייסת או שברזיל מכריזה אמברגו או שאין זה המקרה שגם קובה ממשיכה לשלוח נשק לדרום-אמריקה וגם הרפובליקה הדומיניקנית פונה לאום.
8. או שברזיל מכריזה אמברגו והרפובליקה הדומיניקנית פונה לאום או שקובה ממשיכה לשלוח נשק לדרום-אמריקה או שארגנטינה מגייסת.
9. ארגנטינה מגייסת ואו שברזיל מכריזה אמברגו או שגם קובה ממשיכה לשלוח נשק לדרום-אמריקה וגם הרפובליקה הדומיניקנית פונה לאום.
10. או שקובה איננה ממשיכה לשלוח נשק לדרום-אמריקה או שהרפור בליקה הדומיניקנית איננה פונה לאום, ואין ארגנטינה מגייסת וגם אין ברזיל מכריזה אמברגו.
11. ארגנטינה מגייסת וברזיל מכריזה אמברגו, והרפובליקה הדומיניקנית פונה לאום.
12. ארגנטינה מגייסת; וברזיל מכריזה אמברגו והרפובליקה הדומיניקנית פונה לאום.

### III. טענות-תנאי ואימפליקציה מטריאלית

כאשר שתי טענות מהוברות ע"י הצבת המלה "אם" לפני הראשונה והמלה "הרי" או "אזי" ביניהן, הטענה המורכבת היא "טענת-תנאי" (נקראת גם היפותטית או אימפליקציה). בטענות-תנאי, הרכיב שבין "אם" לבין "הרי" נקרא הרישא (או האימפליקנס, או — נדיר — הפרוטסיס), והרכיב שבעקרו בוח המלה "הרי" נקרא הסיפא (או האימפליקט, או — נדיר — האפודוסיס). למשל, הטענה "אם מר ג'ונס הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי שמר ג'ונס משתכר בדיוק פירשלושה מהבלמן" היא טענת-תנאי שבה "מר ג'ונס הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן" היא הרישא, ו"מר ג'ונס משתכר בדיוק פירשלושה מהבלמן" היא הסיפא.

טענת-תנאי טוענת שהרישא שלה גוררת אחריה את הסיפא. אין היא טרענת שהרישא שלה אמיתית, אלא רק שאם הרישא שלה אמיתית, הסיפא שלה אמיתית גם היא. אין היא טוענת שהסיפא שלה אמיתית אלא רק שהסיפא שלה אמיתית אם הרישא שלה אמיתית. משמעותה העיקרית של טענת-תנאי היא יחס האימפליקציה, הנטען כקיים בין הרישא והסיפא שלה, לפי סדר זה. כדי להבין משמעותה של טענת-תנאי, אנו חייבים איפוא להבין אימפליקציה מהי.

מתעוררת האפשרות שאולי לביטוי "אימפליקציה" יותר ממשמעות אחת. מצאנו הכרח להבחין בין מובנים שונים של המלה "או" לפני שהכנסנו סמל לוגי מיוחד שיהלום בדיוק משמעות אחת ויחידה של מלה זו. אלמלא נהגנו כך, רבי-המשמעות של השפה העברית היתה מידבקת בסמליות הלוגית שלנו ומונעת בעדה מלהשיג את הבהירות והדיוק שנתכוננו להם. באותה מידה יהא זה חשוב להבחין בין המובנים השונים של "גורר" או "אם — הרי" לפני שנכניס סמל לוגי מיוחד בקשר לכך.

הבה נזהיל במניית מספר פסיק-תנאי שונים, אשר כל אחד מהם נראה כטוען סוג שונה של אימפליקציה, ואשר לכל אחד מהם מתאים מובן שונה של "אם — הרי".

- א. אם כל בני-האדם הם בני-תמותה ואם סוקרטס הוא אדם, הרי סוקרטס בן-תמותה.
- ב. אם שחורי הוא רוק, הרי ששחורי הוא לא-יבשוי.
- ג. אם נייר-לקמוס כחול יוטבל בחומצה, הרי ששני נייר-הלקמוס יהפוך אדום.
- ד. אם האוניברסיטה תפסיד במשחק זה, אזי אוכל את בובעי.

ושמו הטעיית שלילת הרישא, ואי-תקפותו מוכחת מניהיוביה בעזרת לוחות אמת. ההטעיה האחרונה דומה באופן שטחי לדפוס הטיעון התקף

$$p \supset q$$

$$\sim q$$

$$\therefore \sim p$$

ושמו מדום טולנס.

**תרגילים**

I. השתמש בלוחות אמת כדי להוכיח את תקפותם או אי-תקפותם של דפוסי הטיעון הללו:

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1 * <math>p \supset q</math><br/><math>\therefore \sim q \supset \sim p</math></p> <p>2 <math>p \supset q</math><br/><math>\therefore \sim p \supset \sim q</math></p> <p>3 <math>p \cdot q</math><br/><math>\therefore p</math></p> <p>4 <math>p</math><br/><math>\therefore p \vee q</math></p> <p>5 * <math>p</math><br/><math>\therefore p \supset q</math></p> <p>6 <math>p \supset q</math><br/><math>\therefore p \supset (p \cdot q)</math></p> <p>7 <math>(p \vee q) \supset (p \cdot q)</math><br/><math>\therefore (p \supset q) \cdot (q \supset p)</math></p> <p>8 <math>p \supset q</math><br/><math>\sim p</math><br/><math>\therefore \sim p</math></p> <p>9 <math>p \supset q</math><br/><math>\sim q</math><br/><math>\therefore \sim q</math></p> <p>10 * <math>p</math><br/><math>q</math><br/><math>\therefore p \cdot q</math></p> <p>11 <math>p \supset q</math><br/><math>p \supset r</math><br/><math>\therefore q \vee r</math></p> <p>12 <math>p \supset q</math><br/><math>q \vee r</math><br/><math>\therefore r \supset p</math></p> <p>13 <math>p \supset (q \supset r)</math><br/><math>p \supset q</math><br/><math>\therefore p \supset r</math></p> <p>14 <math>p \supset (q \cdot r)</math><br/><math>(q \vee r) \supset \sim p</math><br/><math>\therefore \sim p</math></p> <p>15 * <math>p \supset (q \supset r)</math><br/><math>q \supset (p \supset r)</math><br/><math>\therefore (p \vee q) \supset r</math></p> <p>16 <math>(p \supset q) \cdot (r \supset s)</math><br/><math>p \vee r</math><br/><math>\therefore q \vee s</math></p> | <p>17 <math>(p \supset q) \cdot (r \supset s)</math><br/><math>\sim q \vee \sim s</math><br/><math>\therefore \sim p \vee \sim r</math></p> <p>18 <math>p \supset (q \supset r)</math><br/><math>q \supset (r \supset s)</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> <p>19 <math>p \supset (q \supset r)</math><br/><math>(q \supset r) \supset s</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> <p>20 <math>(p \supset q) [(p \cdot q) \supset r]</math><br/><math>p \supset (r \supset s)</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>18 <math>p \supset (q \supset r)</math><br/><math>q \supset (r \supset s)</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> <p>19 <math>p \supset (q \supset r)</math><br/><math>(q \supset r) \supset s</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> <p>20 <math>(p \supset q) [(p \cdot q) \supset r]</math><br/><math>p \supset (r \supset s)</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> | <p>17 <math>(p \supset q) \cdot (r \supset s)</math><br/><math>\sim q \vee \sim s</math><br/><math>\therefore \sim p \vee \sim r</math></p> <p>18 <math>p \supset (q \supset r)</math><br/><math>q \supset (r \supset s)</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> <p>19 <math>p \supset (q \supset r)</math><br/><math>(q \supset r) \supset s</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> <p>20 <math>(p \supset q) [(p \cdot q) \supset r]</math><br/><math>p \supset (r \supset s)</math><br/><math>\therefore p \supset s</math></p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

II. השתמש בלוחות אמת כדי לקבוע תקפותו או אי-תקפותו של כל אחד מן הארגומנטים הללו:

- \* 1. אם אלן יצא מן התחרות, הרי או שכראון יזכה במינוי או שקלרק יהיה מאוכזב. בראון לא יזכה במינוי. לכן אם אלן יצא מן התחרות, הרי שקלרק יהיה מאוכזב.
2. אם החוזה יימסר לדיוויז, הרי שאדוארדס עומד להרוויח כסף רב בשנה הבאה. אם החוזה יימסר לדיוויז, הרי שפראנץ יסבול מקשיים כספיים. לכן אם אדוארדס עומד להרוויח כסף רב בשנה הבאה, הרי שפראנץ יסבול מקשיים כספיים.
3. אם גרהם בחוץ על מגרש הגולף, הרי שהרווי נמצא בתורנות בבית החולים ואיווס חייב היה לשנות את מדיניותו. הרווי איננו בתורנות בבית החולים. לכן גרהם איננו בחוץ על מגרש הגולף.
4. אם ג'ונס יגלה את הקשר, הרי שאם הוא מעריך את אשתו, הרי שיעזוב את הארץ. הוא מעריך את אשתו. לכן אם ג'ונס יגלה את הקשר, הרי שיעזוב את הארץ.
- \* 5. אם קלי ישכור מכונית, הרי שאם יעלה על הכביש המהיר, הרי שיגיע לפני השעה שנקבעה. קלי יגיע לפני השעה שנקבעה. לכן אם קלי ישכור מכונית, הרי שיעלה על הכביש המהיר.
6. אם לוואל פסול למשחק, הרי או שמונרו הוא המגן או שגורטון המגן. מונרו איננו המגן. לכן אם נורטון איננו המגן, הרי שלוואל איננו פסול למשחק.
7. אם אולסון תומך בכומר, הרי שפטרסון "רץ" לבחירות. אם פטרסון "רץ" לבחירות, הרי שקואקנבש עוזב את המפלגה. אם קואקנבש עוזב את המפלגה, הרי שאולסון איננו תומך בכומר. לכן אולסון איננו תומך בכומר.

8. אם רובינסון ימונה לכהונת הנשיא, הרי שסמית ימונה למשרת סגן-הנשיא. אם תומפסון ימונה לכהונת הנשיא, הרי שסמית ימונה למשרת סגן-הנשיא. או שרובינסון ימונה לכהונת הנשיא או שתומפסון ימונה למשרת הנשיא. לכן סמית ימונה למשרת סגן-הנשיא.

9. אם אליס תינשא לאיש, הרי או שבטי תהיה שושבינית או שקרולין תהיה שושבינית. אם בטי היא שושבינית וקרולין היא שושבינית, הרי שתהיה מריבה בחתונה. לכן אם אליס תינשא לאיש, הרי שתהיה מריבה בחתונה.

10. אם אליס תינשא לאיש, הרי שבטי היא שושבינית וקרולין היא שושבינית. אם או שבטי היא שושבינית או קרולין היא שושבינית, הרי שתהיה מריבה בחתונה. לכן אם אליס תינשא לאיש, הרי שתהיה מריבה בחתונה.

#### v. דפוס־טענות וטענות

עתה נבחר מושג שהונח באופן סמוי בחלק הקודם, והוא מושג דפוס־הטענה. ישנה הקבלה מדויקת בין יחס טיעון לדפוס־הטיעון, מחד גיסא, לבין יחס הטענה לדפוס־הטענה, מאידך גיסא. ההגדרה של "דפוס־טענה" מוכיחה זאת בעליל: "דפוס־טענה הוא כל שרשרת סמלים המכילה מישתנים פסוקיים אך לא טענות, כך שכאשר מישתנים פסוקיים מוחלפים בטענות — כשאותה טענה מחליפה את אותו המישתנה הפסוקי לאורך כל הדרך — התוצאה היא טענה". וכך,  $p \vee q$  הוא דפוס־טענה, שכן כאשר המישתנים  $p$  ו- $q$  מוחלפים בטענות, מתקבלת טענה. הואיל והטענה המתקבלת היא דיסיונקציה,  $p \vee q$  הוא דפוס־טענה דיסיונקטיבי. באופן אנלוגי,  $p \cdot q$  ו- $p \supset q$  הם דפוס־טענה קוניונקטיבי ותנאי, ו- $\sim p$  הוא דפוס שלילה או הפחשה. כשם שעל כל טיעון בעל דפוס מסויים אומרים שהוא מקרה הצבה של אותו דפוס־טיעון, כך על כל טענה בעלת דפוס מסויים אומרים שהיא מקרה הצבה של אותו דפוס־טענה. וכשם שציינו את הצורה בהא הידיעה של טיעון נתון, כך אנו מציינים את הצורה בהא הידיעה של טענה נתונה כאותו דפוס־טענה שממנו נובעת הטענה בהחליפנו כל מישתנה פסוקי אחר בטענה פשוטה אחרת. וכך,  $p \vee q$  היא הצורה בהא הידיעה של הטענה "האיש העיוור חובש כובע אדום או האיש העיוור חובש כובע לבן".

טבעי בהחלט להרגיש שאם כי הטענות "לינקולן נרצח" (מסומלת ב-L)

ו"או שלינקולן נרצח או שהוא לא נרצח" (מסומלת ב- $L \vee \sim L$ ) שתיהן אמיתיות, בכל זאת הן אמיתיות ב"אופנים שונים" או יש להן "סוגים שונים" של אמיתות. באופן דומה, טבעי בהחלט להרגיש שאם כי הטענות "ושינגטון נרצח" (מסומלת ב- $W$ ) ו"ושינגטון גם נרצח וגם לא נרצח" (מסומלת ב- $W \cdot \sim W$ ) שתיהן שקריות, בכל זאת הן שקריות באופנים שונים, או יש להן "סוגים שונים" של שקרות. אף-על-פי שאיננו מתיימרים לתת איזה שהוא הסבר פסיכולוגי ל"הרגשות" אלה, בכל זאת באפשרותנו להצביע על הבדלים לוגיים מסויימים שאותם הן הולמות כנראה.

הטענה L היא אמיתית והטענה W היא שקרית; אלה עובדות היסטוריות. אין שום הכרח לוגי קשור בהן. מאורעות יכולים היו להתרחש אחרת, וערכי האמת של טענות כגון L ו-W חייבים להתגלות בעזרת מחקר אִמפירי של ההיסטוריה. אולם הטענה  $L \vee \sim L$ , אם כי היא אמיתית, איננה בעלת אמת היסטורית. כאן ישנו הכרח לוגי, ואין אפשרות שהמאורעות יהיו כאלה שיעשוהו שקרית, ואמיתותה יכולה להיות ידועה בלי תלות בשום חקירה אִמפירית. הטענה  $L \vee \sim L$  היא אמת לוגית, אמת צורנית, היא אמיתית בכוח צורתה בלבד. היא מקרה הצבה של דפוס־טענה אשר כל מקרי ההצבה שלו הן טענות אמיתיות.

דפוס־הטענה שיש לו אך ורק מקרי הצבה אמיתיים הוא דפוס־טענה טאוטולוגי, או טאוטולוגיה. כדי להראות כי דפוס־הטענה  $p \vee \sim p$  הוא טאוטולוגיה, אנו בונים לוח אמת זה:

$p$	$\sim p$	$p \vee \sim p$
א	ש	א
ש	א	א

ללוח אמת זה עמודה התחלתית, או מנחה, אחת בלבד, משום שהדפוס הנדון מכיל מישתנה פסוקי אחד בלבד. לכן, יש שתי שורות בלבד, המייצגות את כל מקרי ההצבה האמפיריים. יש רק אותיות א בעמודה שמתחת לדפוס הטענה הנדון, ועובדה זו מראה כי כל מקרי ההצבה שלו הם אמיתיים. כל טענה שהיא מקרה הצבה של דפוס טענה טאוטולוגי הינה אמיתית בזכות צורתה, והיא עצמה מכונה טאוטולוגית, או טאוטולוגיה.

על דפוס טענה שיש לו מקרי הצבה שקריים בלבד אומרים שהוא פותר את עצמו, או שהוא סתירה, והוא שקרי מבחינה לוגית. דפוס הטענה  $p \cdot \sim p$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{דיסיונקציה} \\ \text{קוניונקציה} \end{array} \right\}$  של שתי טענות שקולה לוגית  
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{דיסיונקציה} \\ \text{קוניונקציה} \end{array} \right\}$  של שלילת שתי הטענות.

שני דפוס־טענות שקולים לוגית, אם בלי קשר לטענות המוצבות במקום מישתני הפסוקים שלהם — כאשר אותן הטענות באות במקום אותם מישתני הפסוקים בשני דפוס־הטענות — וזוגות הטענות המתקבלות מכך הן שקולות. הואיל ו־ $(p \sim q) \sim (p \vee q)$  ו־ $\sim p \vee \sim q \sim (p \wedge q)$  שקולים זה לזה לוגית (לפי חוק דה־מורגאן וחוק השלילה הכפולה), אין שום גימוק לוגי להגדיר את  $p \supset q$  כ־ $(p \sim q)$ , ולא כ־ $\sim p \vee q$ . והאחרון הוא הגדרה שכיחה יותר לסמל הפרסה.

קיים יחס חשוב בין טאוטולוגיות וארגומנטים תקפים. לכל ארגומנט תואמת טענת־תנאי אשר הרישא שלה היא הקוניונקציה של הקדמות האר־גומנט ואשר הסיפא שלה היא מסקנת הארגומנט. וכך, לכל טיעון בעל הצורה

$$p \supset q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

תואמת טענת־תנאי בעלת הצורה  $p \supset q$ . ברור כי לוח אמת המוכיח כי דפוס הטיעון תקף גם יראה כי דפוס־טענת־התנאי התואם אותו הוא טאוטולוגי. דפוס־טיעון תקף אם ורק אם בלוח האמת שלו יש א בעמודת המסקנה בכל שורה שבה יש א בכל עמודות הקדמותיה. אולם ש יכול להופיע בעמודה של דפוס־טענת־התנאי התואם רק כאשר ישנן אותיות א בכל ההקדמות ו־ש במסקנה. לכן רק אותיות א יופיעו בעמודת טענת־התנאי התואמת ארגומנט תקף. וכך, לכל ארגומנט תקף הבנוי על סמך פונקציות האמת שנדונו בפרק זה, הטענה שהקדמותיו גוררות את מסקנתו היא טאוטולוגיה.

תרגילים

I. השתמש בלוחות אמת כדי לאפיין את דפוס־הטענות הללו כטאו־טולוגיות, סותרות את עצמן או קונטינגנטיות:

- 1.  $[p \supset (p \supset q)] \supset q$  \*
- 2.  $p \supset [(p \supset q) \supset q]$
- 3.  $(p \cdot q) \cdot (p \supset \sim q)$
- 4.  $p \supset [\sim p \supset (q \vee \sim q)]$

$$(q \vee \sim q)$$

- \* 5.  $p \supset [p \supset (q \cdot \sim q)]$
- 6.  $(p \supset p) \supset (q \cdot \sim q)$
- 7.  $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$
- 8.  $[p \supset (q \supset p)] \supset [(q \supset q) \supset \sim (r \supset r)]$
- 9.  $\{(p \supset q) \cdot (r \supset s)\} \cdot (p \vee r) \supset (q \vee s)$
- 10.  $\{[(p \supset q) \cdot (r \supset s)] \cdot (q \vee s)\} \supset (p \vee r)$

II. השתמש בלוחות אמת כדי לקבוע איזה מכפול־התנאי דלהלן הם טאוטולוגיות:

- \* 1.  $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$
- 2.  $(p \supset q) \equiv (\sim p \supset \sim q)$
- 3.  $[(p \supset q) \supset r] \equiv [(q \supset p) \supset r]$
- 4.  $[p \supset (q \supset r)] \equiv [q \supset (p \supset r)]$
- \* 5.  $p \equiv [p \cdot (p \vee q)]$
- 6.  $p \equiv [p \vee (p \cdot q)]$
- 7.  $p \equiv [p \cdot (p \supset q)]$
- 8.  $p \equiv [p \cdot (q \supset p)]$
- 9.  $p \equiv [p \vee (p \supset q)]$
- 10.  $(p \supset q) \equiv [(p \vee q) \equiv q]$

VI. הפרדוקסים של האימפליקציה המטריאלית

ישנם שני דפוס־טענה,  $p \supset (q \supset p)$  ו־ $\sim p \supset (p \supset q)$ , אשר קל להוכיח שהם טאוטולוגיים. ככל שדפוס־טענה אלה עשויים להיות פחות־יערך בני־סוחם הסימלי, כשהם מובעים בעברית רגילה הם נראים מפתיעים ואף פרדוקסליים. את הראשון אפשר להביע כך: "אם טענה הינה אמיתית, הרי שהיא נגזרת אחר כל טענה שבעולם". הואיל וזוהי אמת כי כדור־הארץ עגול, יוצא כי "הירח עשוי גבינה ירוקה גורר שכדור־הארץ עגול"; וזה באמת מוזר מאוד, במיוחד משום שגם יוצא כי "הירח איננו עשוי גבינה ירוקה גורר שכדור־הארץ עגול". את הטאוטולוגיה השנייה אפשר להביע כך: "אם טענה הינה שקרית, הרי שהיא גוררת כל טענה שבעולם". הואיל והו שקר כי הירח עשוי גבינה ירוקה, יוצא כי "הירח עשוי גבינה ירוקה גורר שכדור־הארץ עגול", וזה מוזר עוד הרבה יותר, כשאנו מכירים כי גם יוצא ש"הירח עשוי גבינה ירוקה גורר שכדור־הארץ איננו עגול".

הדבר נראה פרדוקסלי משום שאנו מאמינים כי צורת כדור־הארץ וחומר הירח הם בהחלט לא־רלוונטיים זה לזה, ואנו גם מאמינים ששום טענה, אמיתית או שקרית, איננה עשויה באמת לגרור טענה אחרת כלשהי, אמיתית

1.  $W \supset X$  .6
2.  $(W \supset Y) \supset (Z \vee X)$
3.  $(W \cdot X) \supset Y$
4.  $\sim Z / \therefore X$
5.  $W \supset (W \cdot X)$
6.  $W \supset Y$
7.  $Z \vee X$
8.  $X$

1.  $F \supset \sim G$  .8
2.  $\sim F \supset (H \supset \sim G)$
3.  $(\sim I \vee \sim H) \supset \sim \sim G$
4.  $\sim I / \therefore \sim H$
5.  $\sim I \vee \sim H$
6.  $\sim \sim G$
7.  $\sim F$
8.  $H \supset \sim G$
9.  $\sim H$

1.  $Q \supset R$  .5 \*
2.  $\sim S \supset (T \supset U)$
3.  $S \vee (Q \vee T)$
4.  $\sim S / \therefore R \vee U$
5.  $T \supset U$
6.  $(Q \supset R) \cdot (T \supset U)$
7.  $Q \vee T$
8.  $R \vee U$

1.  $(A \vee B) \supset C$  .7
2.  $(C \vee B) \supset [A \supset (D \equiv E)]$
3.  $A \cdot D / \therefore D \equiv E$
4.  $A$
5.  $A \vee B$
6.  $C$
7.  $C \vee B$
8.  $A \supset (D \equiv E)$
9.  $D \equiv E$

1.  $I \supset J$  .9
2.  $I \vee (\sim \sim K \cdot \sim \sim J)$
3.  $L \supset \sim K$
4.  $\sim (I \cdot J) / \therefore \sim L \vee \sim J$
5.  $I \supset (I \cdot J)$
6.  $\sim I$
7.  $\sim \sim K \cdot \sim \sim J$
8.  $\sim \sim K$
9.  $\sim L$
10.  $\sim L \vee \sim J$

6. ספינה (Abs.)

$$p \supset q$$

$$\therefore p \supset (p \cdot q)$$

8. קוניונקציה (Conj.)

$$p$$

$$q$$

$$\therefore p \cdot q$$

5. דילמה בינה (C.D.)

$$(p \supset q) \cdot (r \supset s)$$

$$p \vee r$$

$$\therefore q \vee s$$

7. פישוש (Simp.)

$$p \cdot q$$

$$\therefore p$$

9. הוספה (Add.)

$$p$$

$$\therefore p \vee q$$

חשעת כללי ההיסק האלה תואמים את דפוסי-הטיעון היסודיים אשר תקפותם מאושרת בנקל בעזרת לוחות אמת. השמות שנמנו כאן הם ברובם מסורתיים, והשימוש בסימוניהם המקוצרים מאפשר לערוך את ההוכחות הצורניות תוך כתיבה מינימלית.

תרגילים

1. כל אחד מהביטויים הללו הינו הוכחה צורנית לחקפותו של הארגון מנט המצויין בו. קבע את ה"הצדקה" לכל שורה שאיננה הקדמה:

1.  $(E \vee F) \cdot (G \vee H)$  .2
2.  $(E \supset G) \cdot (F \supset H)$
3.  $\sim G / \therefore H$
4.  $E \vee F$
5.  $G \vee H$
6.  $H$

1.  $A \cdot B$  .1 \*
2.  $(A \vee C) \supset D / \therefore A \cdot D$
3.  $A$
4.  $A \vee C$
5.  $D$
6.  $A \cdot D$

4.

1.  $N \supset O$
2.  $(N \cdot O) \supset P$
3.  $\sim (N \cdot P) / \therefore \sim N$
4.  $N \supset (N \cdot O)$
5.  $N \supset P$
6.  $N \supset (N \cdot P)$
7.  $\sim N$

1.  $I \supset J$  .3
2.  $J \supset K$
3.  $L \supset M$
4.  $I \vee L / \therefore K \vee M$
5.  $I \supset K$
6.  $(I \supset K) \cdot (L \supset M)$
7.  $K \vee M$

1.  $(L \supset M) \supset (N \equiv O)$
2.  $(P \supset \sim Q) \supset (M \equiv \sim Q)$
3.  $\{[(P \supset \sim Q) \vee (R \equiv S)] \cdot (N \vee O)\} \supset [(R \equiv S) \supset (L \supset M)]$
4.  $(P \supset \sim Q) \vee (R \equiv S)$
5.  $N \vee O / \therefore (M \equiv \sim Q) \vee (N \equiv O)$
6.  $[(P \supset \sim Q) \vee (R \equiv S)] \cdot (N \vee O)$
7.  $(R \equiv S) \supset (L \supset M)$
8.  $(R \equiv S) \supset (N \equiv O)$
9.  $[(P \supset \sim Q) \supset (M \equiv \sim Q)] \cdot [(R \equiv S) \supset (N \equiv O)]$
10.  $(M \equiv \sim Q) \vee (N \equiv O)$

II. בנה הוכחה צורנית לתקפותו של כל אחד מן הארגומנטים הללו. תוך שימוש בסימני הקיצור המוצעים:

\* 1. אם או ג'ורג' או הרברט זוכים, הרי שגם ג'ק וגם קנת מפסידים. ג'ורג' זכה. לכן ג'ק הפסיד. (G — ג'ורג' זוכה; H — הרברט זוכה; J — ג'ק מפסיד; K — קנת מפסיד.)

2. אם אדמס מצטרף, הרי שיוקרת המועדון גוברת; ואם בייקר מצטרף, הרי שמצבו הכספי של המועדון יהיה יותר בטוח. או שאדמס או שבייקר מצטרפים. אם יוקרת המועדון גוברת, הרי שבייקר יצטרף; ואם מצבו הכספי של המועדון נעשה יותר בטוח, הרי שווילסון יצטרף. לכן או שבייקר או שווילסון יצטרפו. (A — אדמס מצטרף; I — יוקרת המועדון גוברת; B — בייקר מצטרף; M — מצבו הכספי של המועדון יותר בטוח; W — ווילסון מצטרף.)

3. אם בראון קיבל את השדר, הרי שנסע במטוס; ואם הוא נסע במטוס, הרי שלא יאחר לפגישה. אם המברק היה ממוען לאינכות, הרי שבראון יאחר לפגישה. או שבראון קיבל את השדר או שהמברק היה ממוען לאינכות. לכן או שבראון נסע במטוס או שהוא יאחר לפגישה. (K — בראון קיבל את השדר; N — בראון נסע במטוס; I — בראון יאחר לפגישה; M — המברק היה ממוען לאינכות.)

4. אם נוויל קונה את המגרש, הרי שייבנה בניין-משרדים; ואילו אם פייטון קונה את המגרש, הרי שהמגרש יימכר במהרה שנית. אם ריברס קונה את המגרש, הרי שייבנה בניין-חנויות; ואם ייבנה בניין-חנויות, הרי שתומפסון יציע להחכירו. או נוויל או ריברס יקנו את המגרש. לכן או שייבנה בניין-משרדים או שייבנה בניין-חנויות. (N — נוויל קונה את המגרש; M — ייבנה בניין-משרדים; P — פייטון קונה את המגרש; Q — המגרש יימכר במהרה שנית; R — ריברס קונה את המגרש; H — ייבנה בניין-חנויות; T — תומפסון יציע להחכירו.)

\* 5. אם הגשם יימשך, הרי שהנהר יגאה. אם הגשם יימשך והנהר יגאה, הרי שהגשר יוצף. אם המשכת הגשם תציף את הגשר, הרי שדרך יחידה איננה מספיקה לעיר. או שדרך יחידה מספיקה לעיר או שמהנדסי התנועה שגו. לכן מהנדסי התנועה שגו. (C — הגשם נמשך; R — הנהר גואה; B — הגשר מוצף; S — דרך יחידה מספיקה לעיר; M — מהנדסי התנועה שגו.)

6. אם יעקובסון ילך לפגישה, הרי שיוגש דו"ח מלא; אולם אם יעקובסון לא ילך לפגישה, הרי שתידרש הצבעה מיוחדת. אם יוגש דו"ח מלא, הרי שתיפתח חקירה. אם הליכתו של יעקובסון לפגישה גוררת הגשתו של דו"ח מלא, והגשתו של דו"ח מלא גוררת פתיחתה של חקירה, הרי או שיעקובסון הולך לפגישה ונפתחת חקירה או שיעקובסון איננו הולך לפגישה ושום חקירה איננה נפתחת. אם יעקובסון ילך לפגישה ותיפתח חקירה, הרי שחברים אחדים יעמדו לדין. אולם אם יעקובסון איננו הולך לפגישה ושום חקירה איננה נפתחת, הרי שהארגון יתפורר עד מהרה. לכן או שחברים אחדים יעמדו לדין או שהארגון יתפורר עד מהרה. (J — יעקובסון הולך לפגישה; D — דו"ח מלא מוגש; E — הצבעה מיוחדת נדרשת; H — נפתחת חקירה; T — חברים אחדים עומדים לדין; M — הארגון מתפורר עד מהרה.)

7. אם אין נוכחת, הרי שבטי נוכחת. אם אין ובטי שתייה נוכחות, הרי או שקרליין או שדוריס ייבחרו. אם או קרליין או דוריס ייבחרו, הרי שאתל איננה שולטת למעשה במועדון. אם נוכחות אין גוררת שאתל איננה שולטת למעשה במועדון, הרי שפלורנס תהיה הנשיאה החדשה. כך שפלורנס תהיה הנשיאה החדשה. (A — אין נוכחת; B — בטי נוכחת; C — קרליין תיבחר; D — דוריס תיבחר; E — אתל שולטת למעשה במועדון; F — פלורנס תהיה הנשיאה החדשה.)

8. אם מר ג'ונס הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי שכרו השנתי של ג'ונס נחלק לשלושה בלי שארית. אם שכרו השנתי של ג'ונס נחלק לשלושה בלי שארית, הרי ש-20,000 לירות נחלקות לשלושה בלי שארית. אולם 20,000 לירות אינן נחלקות לשלושה בלי שארית. אם מר רובינסון הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי שמר רובינסון גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. אם מר רובינסון גר בדטרויט, הרי שאין הוא גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. מר רובינסון גר בדטרויט. אם מר ג'ונס איננו שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי או שמר רובינסון או שמר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. לכן מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. (J — ג'ונס הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; E — שכרו השנתי של ג'ונס נחלק לשלושה בלי שארית; T — 20,000 לירות נחלקות לשלושה בלי שארית; R — רובינסון הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; H — רובינסון גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו; D — רובינסון גר בדטרויט; S — סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן.)

9. אם מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי שמר סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. אם מר סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו, הרי שאין הוא גר בשיקגו. מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. אם מר רובינסון גר בדטרויט, הרי שאין הוא גר בשיקגו. מר רובינסון גר בדטרויט. מר סמית גר בשיקגו, ולא — או שמר רובינסון או שמר ג'ונס גרים בשיקגו. אם מר ג'ונס גר בשיקגו, הרי שהבלמן הוא ג'ונס. לכן הבלמן הוא ג'ונס. (S — סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; W — סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו; L — סמית גר בשיקגו; D — רובינסון גר בדטרויט; I — רובינסון גר בשיקגו; C — ג'ונס גר בשיקגו; B — הבלמן הוא ג'ונס.)

10. אם סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד, הרי שסמית איננו המסיק. סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד. אם הבלמן הוא ג'ונס הרי שג'ונס איננו המסיק. הבלמן הוא ג'ונס. אם סמית איננו המסיק וג'ונס איננו המסיק, הרי שרובינסון הוא המסיק. אם הבלמן הוא ג'ונס ורובינסון הוא המסיק, הרי שסמית הוא המפעיל. לכן סמית הוא המפעיל. (O — סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד; M — סמית הוא המסיק; B — הבלמן הוא ג'ונס; N — ג'ונס הוא המסיק; F — רובינסון הוא המסיק; G — סמית הוא המפעיל.)

ישנם ארגומנטים תקפים רבים הבנויים מפונקציות אמת אשר אי אפשר להוכיח את תקפותם אם משתמשים רק בתשעת כללי ההיסק שניתנו עד כה. למשל, כדי לבנות הוכחה צורנית לתקפותו של הארגומנט (החקף באופן גלוי)

$$\begin{aligned} A \supset B \\ C \supset \sim B \\ \therefore A \supset \sim C \end{aligned}$$

נדרשים כללים נוספים.

בכל טענה מורכבת באמצעות קשרי-אמת, אם רכיב שבתוכה מוחלף בטענה אחרת בעלת אותו ערך אמת, ערך האמת של הטענה המורכבת יישאר בעינו. אולם הטענות המורכבות היחידות המעסיקות אותנו כאן הן טענות המורכבות באמצעות קשרי-אמת. נוכל לקבל איפוא ככלל היסק נוסף את כלל התחליף. המתיר לנו להסיק מכל טענה את תוצאת החלפת כולה או מקצתה בכל טענה אחרת השקולה לוגית לחלק שהוחלף. בהשתמשנו בחוק השלילה הכפולה (D.N.), הטוען כי p שקול לוגית ל- $\sim \sim p$ , נוכל להסיק מתוך  $A \supset \sim \sim B$  כל אחד מאלה:

$$A \supset B, \sim \sim A \supset \sim \sim B, \sim \sim (A \supset \sim \sim B), A \supset \sim \sim \sim B$$

בדרך התחליף.

כדי להגדיר היטב את הכלל החדש, אנו מונים מספר שקילויות שהן טאוטולוגיות או אמיתיות לוגית, שעומן אפשר להשתמש בו, ושקילויות אלה מהוות את כללי-ההיסק הנוספים שנשתמש בהם כדי להוכיח תקפותם של ארגומנטים מורכבים. אנו מונים אותן בזו אחר זו בעקבות תשעת החוקים הראשונים שהוצגו קודם.

כלל התחליף: כל אחד מן הכיטויים השקולים טבחינה כדלהלן יכול להחליף את משנהו כל אימת שהם מופיעים:

$$\begin{aligned} \sim (p \cdot q) &\equiv (\sim p \vee \sim q) && 10. \text{ חוקי דהמורגאן} \\ \sim (p \vee q) &\equiv (\sim p \cdot \sim q) && : (De M_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \vee q) &\equiv (q \vee p) && 11. \text{ חילוף (Com.)} \\ (p \cdot q) &\equiv (q \cdot p) \end{aligned}$$



- |                                                                                                                |     |                                          |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|------------------------------------------|---|
| 1. $(I \vee \sim \sim J) \cdot K$                                                                              | .10 | 1. $(E \cdot D) \supset \sim F$          | 9 |
| 2. $[\sim L \supset \sim (K \cdot J)] \cdot [K \supset (I \supset \sim M)] / \therefore \sim (M \cdot \sim L)$ |     | 2. $F \vee (G \cdot H)$                  |   |
| 3. $[(K \cdot J) \supset L] \cdot [K \supset (I \supset \sim M)]$                                              |     | 3. $D \equiv E / \therefore D \supset G$ |   |
| 4. $[(K \cdot J) \supset L] \cdot [(K \cdot I) \supset \sim M]$                                                |     | 4. $(D \supset E) \cdot (E \supset D)$   |   |
| 5. $(I \vee J) \cdot K$                                                                                        |     | 5. $D \supset E$                         |   |
| 6. $K \cdot (I \vee J)$                                                                                        |     | 6. $D \supset (D \cdot E)$               |   |
| 7. $(K \cdot I) \vee (K \cdot J)$                                                                              |     | 7. $D \supset \sim F$                    |   |
| 8. $(K \cdot J) \vee (K \cdot I)$                                                                              |     | 8. $(F \vee G) \cdot (F \vee H)$         |   |
| 9. $L \vee \sim M$                                                                                             |     | .9 $F \vee G$                            |   |
| 10. $\sim M \vee L$                                                                                            |     | 10. $\sim \sim F \vee G$                 |   |
| 11. $\sim M \vee \sim \sim L$                                                                                  |     | 11. $\sim F \supset G$                   |   |
| 12. $\sim (M \cdot \sim L)$                                                                                    |     | 12. $D \supset G$                        |   |

II. בנה הוכחה צורנית לתקפותו של כל אחד מן הארגומנטים הללו, בהשתמשך בכל מקרה בסימון המוצע:

- \* 1. או שהמנהל לא הבחין בשינוי או שאהרת הוא מאשרו. הוא הבחין בו בלי שום ספק. כך שמן ההכרח שהוא מאשרו. (A, H)
2. החמצן שבשפופרת או שהתחבר עם החוט ויצר תחמוצת או שאהרת הוא נעלם כליל. החמצן שבשפופרת לא יכול להיעלם כליל. לכן החמצן שבשפופרת התחבר עם החוט ויצר תחמוצת. (N, H)
3. אם מדינאי הרואה כי דעותיו הקודמות היו מוטעות איננו משנה את דרכו, הוא נאשם בהונאה; ואם הוא משנה את דרכו, הוא צפוי להיות מואשם באי-עקיבות. או שהוא משנה את דרכו או שהוא איננו משנה. לכן או שהוא נאשם בהונאה או שהוא צפוי להיות מואשם באי-עקיבות. (I, H, M)
4. אין זה המקרה אשר או שהוא שכח או שלא היה מסוגל לסיים. לכן הוא היה מסוגל לסיים. (M, S)
- \* 5. אם נייר-הלקמוס הופך עיניו לאדום, הרי שהתמיסה היא חומצה. לכן אם נייר-הלקמוס הופך עיניו לאדום, הרי או שהתמיסה היא חומצה או שמשהו איננו כשורה איישים. (E, H, A)

- |                                                                                          |    |                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------|-----|
| 1. $(M \vee N) \supset (O \cdot P)$                                                      | .4 | 1. $(H \vee I) \supset [J \cdot (K \cdot L)]$              | 3   |
| 2. $\sim O / \therefore \sim M$                                                          |    | 2. $I / \therefore J \cdot K$                              |     |
| 3. $\sim O \vee \sim P$                                                                  |    | 3. $I \vee H$                                              |     |
| 4. $\sim (O \cdot P)$                                                                    |    | 4. $H \vee I$                                              |     |
| 5. $\sim (M \vee N)$                                                                     |    | 5. $J \cdot (K \cdot L)$                                   |     |
| 6. $\sim M \cdot \sim N$                                                                 |    | 6. $(J \cdot K) \cdot L$                                   |     |
| 7. $\sim M$                                                                              |    | 7. $J \cdot K$                                             |     |
| 1. $T \cdot (U \vee V)$                                                                  | .6 | 1. $(Q \vee \sim R) \vee S$                                | 5 * |
| 2. $T \supset [U \supset (W \cdot X)]$                                                   |    | 2. $\sim Q \vee (R \cdot \sim Q) / \therefore R \supset S$ |     |
| 3. $(T \cdot V) \supset \sim (W \vee X)$                                                 |    | 3. $(\sim Q \vee R) \cdot (\sim Q \vee \sim Q)$            |     |
| 4. $(T \cdot U) \supset (W \cdot X)$                                                     |    | 4. $(\sim Q \vee \sim Q) \cdot (\sim Q \vee R)$            |     |
| 5. $(T \cdot V) \supset (\sim W \cdot \sim X)$                                           |    | 5. $\sim Q \vee \sim Q$                                    |     |
| 6. $[(T \cdot U) \supset (W \cdot X)] \cdot [(T \cdot V) \supset (\sim W \cdot \sim X)]$ |    | 6. $\sim Q$                                                |     |
| 7. $(T \cdot U) \vee (T \cdot V)$                                                        |    | 7. $Q \vee (\sim R \vee S)$                                |     |
| 8. $(W \cdot X) \vee (\sim W \cdot \sim X)$                                              |    | 8. $\sim R \vee S$                                         |     |
| 9. $W \equiv X$                                                                          |    | 9. $R \supset S$                                           |     |
| 1. $A \supset B$                                                                         | .8 | 1. $Y \supset Z$                                           | .7  |
| 2. $B \supset C$                                                                         |    | 2. $Z \supset [Y \supset (R \vee S)]$                      |     |
| 3. $C \supset A$                                                                         |    | 3. $R \equiv S$                                            |     |
| 4. $A \supset \sim C / \therefore \sim A \cdot \sim C$                                   |    | 4. $\sim (R \cdot S) / \therefore \sim Y$                  |     |
| 5. $A \supset C$                                                                         |    | 5. $(R \cdot S) \vee (\sim R \cdot \sim S)$                |     |
| 6. $(A \supset C) \cdot (C \supset A)$                                                   |    | 6. $\sim R \cdot \sim S$                                   |     |
| 7. $A \equiv C$                                                                          |    | 7. $\sim (R \vee S)$                                       |     |
| 8. $(A \cdot C) \vee (\sim A \cdot \sim C)$                                              |    | 8. $Y \supset [Y \supset (R \vee S)]$                      |     |
| 9. $\sim A \vee \sim C$                                                                  |    | 9. $(Y \cdot Y) \supset (R \vee S)$                        |     |
| 10. $\sim (A \cdot C)$                                                                   |    | 10. $Y \supset (R \vee S)$                                 |     |
| 11. $\sim A \cdot \sim C$                                                                |    | 11. $\sim Y$                                               |     |

6. יכולים להיות לו ידידים רבים רק אם הוא מכבדם כפרטים. אם הוא מכבדם כפרטים, הרי שאין הוא יכול לצפות שכולם יתנהגו באותה צורה. יש לו ידידים רבים, לכן אין הוא מצפה שכולם יתנהגו באותה צורה. (J, M, K)

7. אם בכיסו של הקרבן נמצא כסף, הרי ששוד לא היה המניע לפשע. אולם שוד או נקם היו המניע לפשע. בכיסו של הקרבן נמצא כסף. לכן מן ההכרח שנקם היה המניע לפשע. (N, S, K)

8. יש להאשים את נפוליון אם הוא ניצל כוח שלא עמד לרשותו בצדק. או שנפוליון היה שליט יחיד חוקי או שהוא ניצל כוח שלא עמד לרשותו בצדק. נפוליון לא היה שליט יחיד חוקי. לכן יש להאשים את נפוליון. (S, N, L)

9. אם נמשיך לתת אשראי לוויילקינס, תהיה להם התחייבות מוסרית לזכות אותנו במכרז לפרוייקט הבא שלהם. באפשרותנו לחשב רווח שולי נדיב ביותר בהכנת אומדננו, אם יש להם התחייבות מוסרית לזכות אותנו במכרז בפרוייקט הבא שלהם. חישוב רווח שולי נדיב יותר בהכנת אומדננו יגרום למצבנו הכספי הכללי להשתפר ניכרות. לכן שיפור ניכר במצבנו הכספי הכללי יבוא בעקבות המשכת האשראי לוויילקינס. (S, R, H, A)

\* 10. אם החוקים טובים ואכיפתם קפדנית, הרי שהפשע יעלם. אם אכיפה קפדנית של החוק תגרום לפשע להעלם, הרי שבעייתנו היא מעשית. החוקים טובים. לכן בעייתנו היא מעשית. (M, J, K, T)

11. אילו היתה האזרחות הרומאית ערוכה לחירויות האזרח, הרי שאזרחי רומא היו נהנים מחופש הדת. אילו היו אזרחי רומא נהנים מחופש הדת, לא היתה רדיפה של הנוצרים הראשונים. אולם הנוצרים הראשונים נרדפו. לכן אין זה אפשרי שהאזרחות הרומאית היתה ערוכה לחירויות האזרח. (R, H, A)

12. אם האיבר הראשון של דיסיונקציה הוא אמיתי, הדיסיונקציה בשלמותה אמיתית. לכן אם שני איברי הדיסיונקציה אמיתיים, הרי שהדיסיונקציה בשלמותה אמיתית. (B, S, R)

13. כדי שהבניין החדש של הרשות המקומית יעמוד במקום נוח, יש להקימו בלב הכרך; ובשביל שיהלום את תפקידו, יש לבנותו גדול כדי שיכון כל משרדי העירייה. אם הבניין החדש של הרשות המקומית מוקם בלב הכרך והוא גדול כדי שיכון כל משרדי העירייה, הרי שמחירו יעלה על

מיליון לירות. מחירו איננו יכול לעבור את מיליון הלירות. לכן או שהבניין החדש של הרשות המקומית יעמוד במקום לא-נוח או שלא יהלום את תפקידו. (M, G, H, L, N)

14. ג'ונס יבוא אם יקבל את ההודעה, בתנאי שהוא מעוניין עדיין. אם כי לא בא, הוא עדיין מעוניין. לכן הוא לא קיבל את ההודעה. (M, H, B)

\* 15. אם סיפור בריאת-העולם לפי תורת-ימשה נכון ככתבו וכלשונו, לא נבראה חמה לפני יום רביעי. ואם חמה לא נבראה לפני יום רביעי, לא היה אפשר שהיא הסיבה לחילופי היום והלילה בשלושת הימים הראשונים. אולם או שהמלה "יום" משמשת בכתב-היחודש במובן אחר מן המקובל כרגיל עתה או שמן ההכרח שחמה היתה הסיבה לחילופי היום והלילה בשלושת הימים הראשונים. מכאן נובע כי או שסיפור בריאת-העולם לפי תורת-ימשה איננו נכון ככתבו וכלשונו או שהמלה "יום" משמשת בכתב-היחודש במובן אחר מן המקובל כרגיל עתה. (J, H, N, T)

16. אם הפקיד או הקופאי לחצו על מתג האזעקה, המרתף היה נסגר אוטומטית והמשטרה היתה מגיעה תוך שלוש דקות. אילו הגיעה המשטרה תוך שלוש דקות, היתה מכוניתם של השודדים נתפסת. אולם מכונית השודדים לא נתפסה. לכן הפקיד לא לחץ על מתג האזעקה. (N, H, M, K, P)

17. אם אדם מונחה תמיד לפי רגש-החובה שלו, עליו לפסוח על הנאות רבות; ואם הוא מונחה תמיד לפי רצון-ההנאה שלו, עליו להזניח תדיר את מילוי חובתו. אדם או שהוא מונחה תמיד לפי רגש-החובה שלו או שהוא מונחה תמיד לפי רצון-ההנאה שלו. אם אדם מונחה תמיד לפי רגש-החובה שלו, אין הוא מזניח תדיר את מילוי חובתו; ואם הוא מונחה תמיד לפי רצון-ההנאה שלו, אין הוא פוסח על הנאות רבות. לכן חייב אדם לפסוח על הנאות רבות אם ורק אם אין הוא מונח תדיר את מילוי חובתו. (Z, H, P, R)

18. התתן עשיר והכלה דלה אך ישרה. אם הכלה דלה והחתן עשיר, הרי או שהיא זכתה בזיווג טוב, או שהם יהיו חשוכי-בנים או שיהיו להם צרות משפחתיות. היא לא זכתה בזיווג טוב, אולם אין להם לא מריבות ולא צרות משפחתיות. מכאן שהם חשוכי-בנים. (M, C, H, Z, J, D, A)

19. או שהשודד נכנס בעד הדלת, או שהפשע נעשה מבפנים ומעורב בכך אחד השרתים. השודד יכול להיכנס בעד הדלת רק אם הברית הוסט מבפנים; אולם אחד השרתים מעורב בכך בוודאי אם הברית הוסט מבפנים. לכן אחד השרתים מעורב בכך. (B, S, M, D)

20. אם אשלם לחייט, לא יישאר ברשותי שום כסף. אוכל ללכת עם נערתו לרקוד רק אם יהיה לי כסף. היא תהיה אומללה אם לא אלך עימה לרקוד. אולם אם לא אשלם לחייט, הוא לא ימסור לי את הליפתי, ובלעדי החליפה ודאי שאינני יכול ללכת עם נערתו לרקוד. אני חייב או לשלם לחייט או לא לשלם לו. כך שמן ההכרח שנערתו תהיה אומללה! (H, V, R, K, S)

II. הוכחה לאיתקפות

מובן כי ארגומנט לאיתקף אין הוכחה צורנית לתקפותו. אולם אם נכשלים מאמצינו לגלות הוכחה צורנית לתקפותו של ארגומנט נתון, אין בישלון זה מוכיח שהארגומנט איננו תקף, ושאינו שום אפשרות לבנות הוכחה כזאת. אפשר שמשמעותו היחידה של הכישלון היא שלא ניסינו די הסיבה לאי יכולתנו למצוא הוכחה לתקפות עלולה להיות העובדה שהארגומנט איננו תקף, אך היא יכולה גם להיות חוסר התושייה שלנו עצמנו — יוצאת כתוצאה מאופיו הלא-יעיל של תהליך בניית ההוכחה. איי-היכולת לבנות הוכחה צורנית לתקפותו של ארגומנט איננה מוכיחה שהארגומנט לא-תקף. מה איפוא משמש כהוכחה שארגומנט נתון איננו תקף?

הדרך שהתואר כאן קשורה באופן הדוק לדרך לוחות האמת, אם כי היא קצרה ממנה בהרבה. יהיה לנו לעזר להיזכר כיצד בעזרת לוח אמת מיניחים איתקפותו של דפוס טיעון לאיתקף. אם אפשר למצוא מקרה אחד ויחיד (שורה) שבו ערכי האמת נקבעים למישתנים הפסיקיים באופן כזה שההקדמת נעשות אמיתיות והמסקנה שקרית — הרי שדפוס הטיעון איננו תקף. אם נוכל איך שהוא לקבוע ערכי אמת לטענות הפשוטות המרכיבות ארגומנט, אשר יעשו את הקדמותיו אמיתיות ומסקנתו שקרית, הרי שקביעה זו תספיק כדי להוכיח איתקפותו של הארגומנט. קביעה כזו היא למעשה, מה שלוחות האמת עושים. אולם אם נוכל לעשות קביעה כזו של ערכי אמת בלי לבנות ממש את כל לוח האמת, נחסוך חלק מן העבודה.

התבונן בארגומנט:

אם המושל חסיד השיכון הציבורי, הרי שהוא חסיד הגבלת היוזמה הפרטית.  
אילו היה המושל קומוניסט, הרי שהיה חסיד הגבלת היוזמה הפרטית.  
לכן אם המושל חסיד השיכון הציבורי, הרי שהוא קומוניסט.

ארגומנט זה מסומל כך:

S ⊃ H  
C ⊃ H  
∴ S ⊃ C

ובאפשרותנו להוכיח את איתקפותו בלי שיהא עלינו לבנות לוח אמת שלם. ראשית אנו שואלים: איזו קביעה של ערכי אמת נחוצה כדי לעשות שהמסקנה תהא שקרית? ברור כי טענת-הנאי הינה שקרית רק כאשר הרישא שלה אמיתית והסיפא שלה שקרית. לכן, קביעת ערך אמם "אמיתי" ל-S "שקרי" ל-C יעשה את המסקנה S ⊃ C לשקרית. ועתה, אם ערך האמת "אמיתי" נקבע ל-H, שתי ההקדמות נעשות אמיתיות, משום שטענת-הנאי הינה אמיתית תמיד כאשר הסיפא שלה אמיתית. נוכל לומר איפוא, שאם ערך האמת "אמיתי" נקבע ל-S ול-H, וערך האמת "שקרי" נקבע ל-C, יהיו לארגומנט הקדמות אמיתיות ומסקנה שקרית ובכך מוכחת איתקפותו. דרך זו של הוכחת איתקפותו היא תחליף לדרך ההוכחה בעזרת לוח אמת. מכל מקום, שתי הדרכים קרובות זו לזו, ויש להכיר בקשר המהותי שביניהן. למעשה, מה שעשינו בקבענו כנאמר לעיל את ערכי האמת, היה לבנות שורה אחת של לוח האמת לארגומנט הנתון. אפשר שהקשר יראה ביתר בהירות כאשר קביעת ערכי האמת תיכתב בצורה אופקית, כגון

S	H	C	S ⊃ H	C ⊃ H	S ⊃ C
אמיתי	אמיתי	שקרי	אמיתי	אמיתי	שקרי

ובצורה זו הם מהווים שורה אחת בלוח האמת לארגומנט הנתון. ארגומנט מוכח כלאיתקף אם ישנה לפחות שורה אחת בלוח-האמת שלו, שבה כל ההקדמות שלו אמיתיות אולם מסקנתו שקרית. לפיכך איננו צריכים לבדוק את כל שורות לוח האמת של ארגומנט כדי לגלות איתקפותו של אותו ארגומנט: די בגילוי שורה אחת ויחידה שבה הקדמותיו אמיתיות כולן ואילו מסקנתו שקרית. הדרך הנוכחית להוכחת איתקפות היא דרך של בניית שורה כזאת בלי שיהא עלינו לבנות את לוח האמת כולו.

הדרך הנוכחית קצרה מאשר כתיבת לוח האמת, ושעור הזמן והעמל הנהסבים גדול יותר יחסית לארגומנטים המכילים מספר גדול יותר של רכיבים פשוטים. לארגומנטים בעלי מספר ניכר של הקדמות, או בעלי הקדמות שסיבוכן רב, אפשר שהקביעה הגדרשת של ערכי אמת לא תהא

קלה. יתכן כי יהיה רצוי לקבוע ערכי אמת אחדים לעשייתן של הקדמות אחדות לאמיתיות לפני שבוחרים קביעה כדי לעשות את המסקנה שקרית. מידה מסויימת של ניסוי וטעייה עשויה להיות נחוצה. אולם בדרך-כלל דרך זו תהא קצרה וקלה יותר מאשר כתיבת לוח האמת בשלמותו.

הרגילים

הוכח אי-תקפותו של כל אחד מן השיעונים הללו בדרך של קביעת ערכי אמת:

- 1 \*  $A \supset B$     2.  $A \supset B$     3.  $\sim (E \cdot F)$     4.  $M \supset (N \vee O)$
- $\sim (\sim K \cdot L)$      $C \supset D$      $(\sim E \cdot \sim F) \supset (G \cdot H)$      $N \supset (P \vee Q)$
- $\sim (\sim I \cdot \sim L)$      $A \vee D$      $H \supset G$      $Q \supset R$
- $\therefore \sim J \supset K$      $\therefore B \vee C$      $\therefore G$      $\sim (R \vee P)$
- 5 \*    6.  $S \supset (T \supset U)$     7.  $D \supset (E \vee F)$     8.  $K \supset (L \cdot M)$     9.  $(S \supset T) \cdot (T \supset S)$
- $B \equiv (C \vee A)$      $V \supset (W \supset X)$      $G \supset (H \vee I)$      $(U \cdot T) \vee (\sim T \cdot \sim U)$
- $C \equiv (A \vee B)$      $T \supset (V \cdot W)$      $\sim E \supset (I \vee J)$      $(U \vee V) \vee (S \vee T)$
- $\sim A$      $\sim (T \cdot X)$      $(I \supset G) \cdot (\sim H \supset \sim G)$      $\sim U \supset (W \cdot X)$
- $\therefore B \vee C$      $\therefore S \equiv V$      $\sim J$      $(V \supset \sim S) \cdot (\sim V \supset \sim Y)$
10.  $A \supset (B \supset \sim C)$      $(D \supset B) \cdot (E \supset A)$      $F \vee C$      $G \supset \sim H$      $I \equiv \sim D$
- $(B \supset H) \cdot (\sim H \supset D)$      $\therefore E \equiv F$
7.  $\therefore D \supset (G \vee I)$
9.  $(U \vee S) \cdot (V \vee Z)$      $\therefore X \cdot Z$

III. אי-עקביות

אם אי-אפשר לקבוע ערכי אמת לטענות פשוטות המרכיבות ארגומנט. באופן שהקדמותיו יעשו אמיתיות ומסקנתו שקרית — הרי שמן ההכרח שהארגומנט תקף. אם כי הדבר נובע מתוך הגדרת ה"תקפות", יש לו תוצאה מוזרה. התבונן בארגומנט דלהלן, אשר הקדמותיו נראות כחסרות כל שייכות למסקנתו:

אילו היתה למטוס תקלה במנוע, היה נוחת בברידיג'פורט.  
אילמלא היתה למטוס תקלה במנוע, היה נוחת בקליבלנד.  
המטוס לא נחת לא בברידיג'פורט ולא בקליבלנד.  
לכן מן ההכרח שהמטוס נחת בדנבר.

ובתרגומו לשפת-הסמלים:

- $A \supset B$
- $\sim A \supset C$
- $\sim (B \vee C)$
- $\therefore D$

כל ניסיון לקבוע ערכי אמת לטענות הפשוטות המרכיבות אותו, כדי לעשות את מסקנתו לשקרית ואת הקדמותיו לאמיתיות — נדון לכישלון. אם נתעלם מן המסקנה ונרכז את קישבנו במטרה האחרת, של עשיית כל ההקדמות אמיתיות בעזרת קביעת ערכי אמת לטענות הפשוטות המרכיבות אותן, אחד דיננו להיכשל אף כאן, בהכניית פחות יומרצית זו.

הסיבה שאי-אפשר לעשות את ההקדמות לאמיתיות ואת המסקנה לשקרית היא, שאי-אפשר לעשות את ההקדמות אמיתיות בשום מקרה, בעזרת שום קביעה של ערכי אמת. שום קביעת ערכי אמת איננה יכולה לעשות את ההקדמות לאמיתיות, כיוון שהן לא-עקביות זו עם זו. הקונוינקציה שלהן סותרת את עצמה, בהיותה מקרה הצבה של דפוס טענה סותרת את עצמה. אילו בנינו לוח אמת לארגומנט הנתון, היינו מוצאים בהכרח שבכל שורה, לפחות אחת ההקדמות היא שקרית. אין שום שורה שבה כל ההקדמות אמיתיות ולכן אין שום שורה שבה ההקדמות אמיתיות כולן והמסקנה

8. אם רביהמלצרים דיבר אמת, הרי שהחלון היה סגור בשעה שהוא נכנס לחדר; ואם הגנן דיבר אמת, הרי שמערכת ההשקייה האוטומטית לא פעלה בערב הרצח. אם רביהמלצרים והגנן משקרים שניהם, הרי שקיים קשר להגן על מישהו בתוך הבית וצריכה היתה להיות שלולית-מים קטנה על הרצפה בתוך החדר סמוך לחלון. אנו יודעים כי אי-אפשר שהחלון היה סגור כאשר רביהמלצרים נכנס לחדר. היתה שלולית-מים קטנה על הרצפה בתוך החדר סמוך לחלון. כך שאם קיים קשר להגן על מישהו בתוך הבית, הרי שהגנן לא דיבר אמת. (S, K, M, G, H, R)

9. מנהיגים היה עוזב את הארץ אילו היה הושש שייתפס, והוא לא היה עוזב את הארץ אלמלא חשש שייתפס. אם הוא חשש שייתפס ועזב את הארץ, היתה רשת הריגול של האוייב כמצב מורלי ירוד ומשוללת-כוח מכדי להזיק לנו. אם הוא לא חשש שייתפס ונשאר בארץ, פירושו של דבר היה כי הוא לא ידע על עבודת הסוכנים שלנו-עצמנו. אם באמת אין הוא יודע על עבודת הסוכנים שלנו-עצמנו, הרי שסוכנינו יכולים לבצר את עמדותיהם בארגון האוייב; ואם סוכנינו יכולים לבצר את עמדותיהם שם, הם ישללו את כוחה של רשת הריגול של האוייב והיא לא תוכל להזיק לנו. לכן רשת הריגול של האוייב תהיה משוללת-כוח מכדי להזיק לנו. (B, L, K, J, H, M)

\* 10. אם חוקרי התפיסה העל-חושית נחשבים לישרים, הרי שעדות ניכרת לתפיסה על-חושית חייבת להתקבל; ותורת ראיית-הנולד חייבת להישקל ברצינות אם מקבלים באופן זמני כעובדה את התפיסה העל-חושית. אם עדות ניכרת לתפיסה העל-חושית מתקבלת, הרי שיש לקבלה באופן זמני כעובדה וחובה לעשות מאמץ להסבירה. תורת ראיית-הנולד חייבת להישקל ברצינות אם אנו נכונים להתייחס ברצינות לאותה מחלקת תופעות הקרויות על-טבעיות; ואם אנו נכונים להתייחס ברצינות לאותה מחלקת תופעות הקרויות על-טבעיות, יש להתייחס ביראת-כבוד מחודשת למדיומים. אם אנו מתקדמים בעניין זה הלאה, הרי שאם יש להתייחס ביראת-כבוד מחודשת למדיומים, עלינו להתייחס ברצינות לטענותיהם על קשר עם המתים. אנו מתקדמים בעניין זה הלאה, אולם עדיין אנו מתחייבים למעשה להאמין בשדים וברוחות אם אנו מתייחסים ברצינות לטענות המדיומים על קשר עם המתים. לכן, אם חוקרי התפיסה העל-חושית נחשבים לישרים, אנו מתחייבים למעשה להאמין בשדים וברוחות. (S, K, J, M, A, H, U, C, L, J)

11. אם נרכוש מגרש הרי שנבנה בית, אם נרכוש מגרש הרי שאם נבנה בית הרי שנקנה רהיטים. אם נבנה בית הרי שאם נקנה רהיטים הרי שנקנה צלחות. לכן אם נקנה מגרש הרי שנקנה צלחות. (C, R, B, M)

12. אם מחיריך נמוכים הרי שמכירותיך יהיו גבוהות, ואם אתה מוכר סחורת-איכות הרי שלקוחותיך יהיו מרוצים. כך שאם מחיריך נמוכים ואתה מוכר סחורת-איכות, הרי שמכירותיך יהיו גבוהות ולקוחותיך מרוצים. (M, S, G, N)

13. אם מחיריך נמוכים הרי שמכירותיך גבוהות, ואם אתה מוכר סחורת-איכות הרי שלקוחותיך יהיו מרוצים. כך שאם או שמחיריך נמוכים או שאתה מוכר סחורת-איכות, הרי אי שמכירותיך יהיו גבוהות או שלקוחותיך יהיו מרוצים. (M, S, G, N)

14. אם ירדן מצטרפת לברית הרי או אלג'יריה או סוריה יחרימו אותה. אם כונית מצטרפת לברית הרי או סוריה או עיראק יחרימו אותה. סוריה איננה מחרימה אותה. לכן אם לא אלג'יריה ולא עיראק אינן מחרימות אותה הרי שלא ירדן ולא כונית אינן מצטרפות לברית. (I, K, S, A, J)

15. אם או ירדן או אלג'יריה מצטרפות לברית הרי שאם או סוריה או כונית מחרימות אותה, הרי שאם כי עיראק איננה מחרימה אותה תימן מחרימה אותה. אם או עיראק או מרוקו אינן מחרימות אותה הרי שמצרים תצטרף לברית. לכן אם ירדן מצטרפת לברית הרי שאם סוריה מחרימה אותה הרי שמצרים תצטרף לברית. (E, M, Y, I, K, S, A, J)