06/08/20

פתרון מבחן מועד א' – 88-133 אינפי 2 תש"ף

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^5+3x^4+5x^3+7x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \int \left[x+1+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{x+1}+C$

ב. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{matrix} t=1+\sqrt{x} \\ x=(t-1)^2 \\ dx=2(t-1)dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{2(t-1)}{t}dt = \int \left(2-\frac{2}{t}\right)dt = 2t-2\ln|t|+C =$

$= 2\left(1+\sqrt{x}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$

2. קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

א. $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}dx$

נחלק את האינטגרל לשני חלקים

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2}dx, \quad \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}dx$$

האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ חיובי, וכיוון ש $\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin(x)}{x^2}}{\frac{1}{x}}=1$ הוא חבר של האינטגרל המתבדר $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$.

לכן אינטגרל זה מתבדר, ולכן גם האינטגרל בשאלה כולו מתבדר, ואין צורך לבדוק את השני.

(שני אינטגרלים **באותו קטע** עשויים לבטל זה את זה, אבל אינטגרל **מקטע אחר** לא יכול לבטל את ההתבדרות.)

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$

נחלק את האינטגרל לשני חלקים

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx, \quad \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$

כיוון $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$ האינטגרל השמאלי הוא אמיתי.

האינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה, כפי שראינו בכיתה.

לכן סה"כ האינטגרל מתכנס.

3. קרבו את האינטגרלים הבאים עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

א. $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$

נעזר בטורי טיילור כמובן

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!}$$

כיוון שמדובר בטור לייבניץ (איברים בגודל שקטן ושואף לאפס, עם סימנים מתחלפים) סכמנו עד ולא כולל האיבר הראשון שקטן מהשגיאה.

ב. $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$x^2 e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n!}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)n!} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 1!} + \frac{1}{7 \cdot 2!} + \cdots + \frac{1}{(2k+3) \cdot k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)n!}$$

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)n!} \right| \leq \frac{1}{2(k+1)+3} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2(k+1)+3} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(k+1)+3} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}$$

חישבנו את סכום הטור החוסם כסכום טור הנדסי, והאי שיוויון מתקיים בזכות שני האי שיווינים הבאים:

$$\frac{1}{(2n+3)n!} \leq \frac{1}{2(k+1)+3}, \qquad n! \geq 2^{n-1}$$

לכן עבור $k = 4$ השגיאה בוודאות קטנה מספיק ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)n!} \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 1!} + \frac{1}{7 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 4!}$$

4. יהי טור פונקציות

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx^2}$$

א. הוכיחו כי $f(x)$ פונקציה רציפה בכל $(0,\infty)$.

אמנם זו מסקנה מיידית מחישוב הפונקציה בסעיף ב', אך נראה כיצד היה ניתן לפתור סעיף זה גם ללא סעיף ב.

כיוון שמדובר בטור של פונקציות רציפות, התכנסות במ"ש תבטיח שפונקצית הגבול רציפה.

אמנם אין התכנסות במ"ש בכל הקטע $(0,\infty)$, אך לכל נקודה $a\in(0,\infty)$ נראה התכנסות במ"ש בקטע $\left(\frac{a}{2},\infty\right)$ שכולל את הנקודה.

תהי $a\in(0,\infty)$, אזי לכל $x\in\left(\frac{a}{2},\infty\right)$ מתקיים כי

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{nx^2}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

קל להראות באמצעות מבחן השורש (או מבחני השוואה) שטור חיובי זה מתכנס, ולכן טור הפונקציות מתכנס במ"ש בקטע $\left(\frac{a}{2},\infty\right)$ לפי מבחן הM של ווירשטראס.

לכן פונקצית הגבול רציפה בקטע זה, ובפרט בנקודה a.

ב. חשבו את $f(x)$. (ניתן לפתור את סעיף זה קודם.)

נחפש טור חזקות קרוב, ונעזר בו.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

בתחום $(-1,1)$. נגזור

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}$$

כעת נציב e^{-x^2} ונקבל שהטור מתכנס אם"ם $\left|e^{-x^2}\right|<1$ כלומר $x\neq 0$

$$\frac{e^{-x^2}}{\left(1-e^{-x^2}\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx^2}$$

5. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ המתכנסת בכל $\mathbb{R}$ לפונקצית הגבול $f(x)$, כך שלכל n הפונקציה $f_n(x)$ מונוטונית עולה ממש ב$\mathbb{R}$.

א. הוכיחו/הפריכו: $f(x)$ מונוטונית עולה ב$\mathbb{R}$.

יהיו $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$.

לכל n מתקיים כי

$$f_n(x_1) < f_n(x_2)$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_1) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x_2)$$

לכן אכן

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

כלומר פונקצית הגבול אכן עולה.

ב. הוכיחו/הפריכו: $f(x)$ מונוטונית עולה ממש ב$\mathbb{R}$.

הפרכה:

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

היא סדרת פונקציות של ישרים עם שיפוע חיובי, ואכן כולם עולים ממש.

אך קל לראות שפונקצית הגבול היא הישר $f(x) = 0$ והיא אינה עולה ממש.

הערת אגב: סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{\arctan(x)}{n}$ מהווה הפרכה, ואף מתכנסת במ"ש בכל הממשיים.

תזכורת:

פונקציה נקראת מונוטונית עולה ב$\mathbb{R}$ אם לכל $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x_1) \leq f(x_2)$.

פונקציה נקראת מונוטונית עולה ממש ב$\mathbb{R}$ אם לכל $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x_1) < f(x_2)$.