83-110 אלגברה לינארית להנדסה – מועד ב' תשפ"ב – 28/02/22

מרצים: פרופ' אליהו מצרי, דר' ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.
- מומלץ לקרוא ראשית את כל השאלות, הן <u>לא</u> מסודרות לפי רמת קושי
- יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.
- כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. תהיינה מטריצות $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ (עם m שורות וn עמודות).

<u>הוכיחו או הפריכו</u> את הטענות הבאות:

א. אם קיים $b\in\mathbb{R}^n$ כך שלא קיים פתרון למשוואה $Av=b$, אז $\dim\big(N(A)\big)\neq 0$.

ב. $\dim(N(A+B))\geq \dim N(A)+\dim N(B)$.

ג. אם $\dim R(B^tA)=n$ וכן $\dim C(AB^t)=m$ אזי A,B ריבועיות.

זכרו:

$R(A)$ הוא מרחב השורות של המטריצה A,

$C(A)$ הוא מרחב העמודות של המטריצה A,

$N(A)$ הוא מרחב האפס של המטריצה A (כלומר מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה).

המשך שאלה 1:

2. תהי מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ויהי $v \in \mathbb{R}^n$, עבור $n > 1$.

א. יהי $1 \le k < n$. הוכיחו כי אם $A^k v = 0$ ואילו $A^{k-1}v \neq 0$ אזי הוקטורים הבאים בת"ל:

$$v, Av, A^2v, \dots, A^{k-1}v$$

(רמז: אפשר לכפול ב-A.)

ב. נניח כי הוקטורים $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v$ שונים זה מזה ובת"ל. הוכיחו או הפריכו: $A^n v = 0$.

ג. נניח כי $A^{n-1}v = A^n v$. הוכיחו או הפריכו: $\det(I - A) = 0$.

המשך שאלה 2:

דף נוסף לשאלה מספר _____

3. תהי מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיס ל $C(A) \cap N(A)$.

ב. מצאו בסיס ל $R(A) \cap N(A)$.

ג. האם A. לכסינה? הוכיחו את תשובתכם.

דף נוסף לשאלה מספר _____

4. נביט במרחב $V = \mathbb{C}^3$ מעל שדה המרוכבים עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית $\langle v, w\rangle = v^t\overline{w}$ והנורמה המושרית. כמו כן, נביט בתת המרחב $U = span\{(1, i, 1+i), (0,1-i, 0)\}$

א. מצאו בסיס א"נ ל-U.

ב. השלימו את הבסיס שמצאתם בסעיף א' לבסיס א"נ ל-V.

ג. מצאו את כל ערכי $z \in \mathbb{C}$ עבורם $(2, z, z^2) \in U$

המשך שאלה מספר 4:

דף נוסף לשאלה מספר _____

5. תהי $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T(x,y,z,w) = (x, x+z, y+w)$$

ונביט בתת המרחב

$$U = span\{(1,0,-1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

א. מצאו בסיס ל$\ker(T)$.

ב. יהי וקטור $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ מצאו וקטור $u \in U$ כך ש $Tu = v$,
הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטרים a,b,c.

ג. מצאו שני וקטורים $u_1 \neq u_2 \in U$ כך ש $Tu_1 = Tu_2$ או הוכיחו שאין זוג וקטורים כאלה.

המשך שאלה מספר 5:

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____