מחלקות צמידות

הגדרה

תהא G חבורה. $g,h\in G$. g צמוד לh אם קיים $x\in G$ כך ש$xgx^{-1}=h$

עובדה

להיות צמוד ל הוא יחס שקילות

הוכחה

(i) g צמוד לעצמו כי $ege^{-1}=g$

(ii) g צמוד לh אמ"ם h צמוד לg:

$\Leftarrow$ g צמוד לh $\Leftrightarrow \exists_{x\in G} xgx^{-1}=h \Leftrightarrow \exists_{x\in G} x^{-1}hx=g \Leftrightarrow \exists_{x^{-1}\in G} x^{-1}h\left(x^{-1}\right)^{-1}$ $\Leftrightarrow$ h צמוד לg.

(iii) טרנזיטיביות - אם g צמוד לh וh צמוד לk, נוכיח g צמוד לk. אכן, g צמוד לh, וh צמוד לk, ז"א קיים $x,y\in G$ כך ש$xgx^{-1}=h$, $yhy^{-1}=k$ $\Leftarrow$ $k=yhy^{-1}=yxgx^{-1}y^{1}=(yx)\,g\,(yx)^{-1}$

הגדרה

מחלקת שקילות ביחס ליחס צמידות נקראת מחלקת צמידות.

סימון כל האיברים הצמודים לאיבר $x\in G$ יסומנו $\operatorname{cong}(x)=\left\{gxg^{-1}:g\in G\right\}$

הערה

$\operatorname{cong}(x)$ היא מחלקת צמידות שמכילה את x

מסקנה

החבורה G מהווה איחוד זה של מחלקות הצמידות שלה.

הוכחה

אם יש יחס שקילות על קבוצה, אז הקבוצה מהווה איחוד זר של מחלקות שקילות. כאמור, מחלקות צמידות הן מחלקות שקילות ביחס ליחס הצמידות.

דוגמאות

(א) G אבלית. לכל איבר $x\in G$ $\{x\}=\left\{gxg^{-1}:g\in G\right\}=\operatorname{cong}(x)$. יתר על כן:

עובדה חבורה G אבלית אמ"ם בכל מחלקות הצמידות שלה יש איבר אחד.

הוכחה $\Leftarrow$ G אבלית $\Leftarrow$ כל מחלקות הצמידות שלה בנות איבר אחד

$\Rightarrow$ אם בכל מחלקות הצמידות יש איבר אחד אזי $\mathrm{cong}\,(x) = \{x\}\,\forall x \in G$ כי x תמיד צמוד לעצמו. מכאן

$$\forall_{x\in G}\mathrm{cong}\,(x) = \left\{gxg^{-1} : g \in G\right\} = \{x\}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall_{x,g\in G} gxg^{-1} = x$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_{x,g\in G} gx = xg$$

$$\Updownarrow$$

G אבלית.

(ב) **טענה** תהא G חבורה כלשהי, $x \in G$ איבר ב-G. $x \in Z(G) \Leftrightarrow \mathrm{cong}\,(x) = \{x\}$

הוכחה $\Leftarrow$ $\forall_{g\in G} gxg^{-1} = \Leftrightarrow \left\{gxg^{-1} : g \in G\right\} = \{x\} \Leftrightarrow \mathrm{cong}\ x = \{x\}$ $x \in Z(G) \Leftrightarrow \forall_{g\in G} gx = xg \Leftrightarrow x$

(ג) $G = GL_n(\mathbb{F})$. $A \in GL_n(\mathbb{F})$ $\mathrm{cong}\,(A) = \left\{BAB^{-1} : B \in GL_n(\mathbb{F})\right\} =$ (כל המטריצות הדומות ל-A = כל המטריצות המייצגות את אותה העתקה לינארית כאשר B החלפת בסיס.

(ד) $G = S_n$, $\pi \in S_n$: $\mathrm{cong}\,(\pi) = \left\{G\pi G^{-1} : G \in S_n\right\}$ וזה שווה לכל התמורות להן אותו מבנה מחזורי כמו ל-π.

הסבר: אם $\pi = (i_1, ...i_k)$, $G\pi G^{-1} = (G(i_1), ...G(i_k))$ ובדומה למכפלת מחזורים זרים.

למשל: $G = S_5$, $\pi = (1,2)$, $\mathrm{cong}\,((1,2)) = \{(i,j) : 1 \le i < j \le 5\}$

בפרט: $|\mathrm{cong}\,(1,2)| = 10$, $|S_5| = 120$

משפט

תהא G חבורה סופית, $x \in G$, $|\mathrm{cong}\,(G)|\,|\,|G|$. כלומר, סדר מחלקות הצמידות מחלק את סדר החבורה.

כדי להוכיח משפט זה נגדיר:

הגדרה

תהא G חבורה, $x \in G$ מרכז של x ב-G הוא $Z_x := \{g \in G : gx = xg\} = \left\{g \in G : gxg^{-1} = x\right\}$

הערה

לא להתבלבל עם מרכז: $Z(g) := \{x \in G : \forall g \in g, gx = xg\}$

דוגמה

$G = S_4$, $Z(S_4) = \{e\}$ מרכז של $(1,2) \in S_4$:

$$Z_{(1,2)} = \{e, (1,2), (3,4), (1,2), (3,4)\}$$

טענה 1

תהא G חבורה, $x \in G$, אזי $Z_x \le G$

הוכחה

$Z_x \neq \emptyset$ כי $e, x \in Z_x$, לכן מספיק להוכיח Z_x סגור תחת כפל והופכי.

(i) Z_x סגור תחת כפל $\forall a, b \in Z_x$, $ax = xa$, $xb = bx$

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab) \Rightarrow \boxed{ab \in Z_x}$$

(ii) סגירות תחת הופכי: $\forall a \in Z_x$, $ax = xa$. נכפיל ב-a^{-1} מימין ומשמאל ונקבל $xa^{-1} = a^{-1}x \Leftrightarrow a^{-1} \in Z_x$.

משפט

תהא G חבורה סופית, $x \in G$. מתקיים $|\text{cong}(x)||Z_x| = |G|$

מסקנה

בסימונים הנ"ל: $|\text{cong}(x)|\,|\,|G|$

הוכחת המשפט

הראינו $Z_x \le G$, לכן לפי משפט לגרנז' $|G| = [G : Z_x]|Z_x|$. כדי להוכיח את המשפט הנ"ל נוכיח $[G : Z_x] = |\text{cong}(x)|$. נגדיר העתקה φ מ-$\text{cong}(x)$ למחלקות שמאליות של Z_x ב-G, ונראה חח"ע ועל.

תהא העתקה φ המוגדרת ע"י $\varphi\left(gxg^{-1}\right) = gZ_x$

צ"ל: φ מוגדרת היטב, חח"ע ועל.

(i) φ מוגדרת היטב. צ"ל אם $gxg^{-1}=hxh^{-1}$ אז $\varphi\left(gxg^{-1}\right)=\varphi\left(hxh^{-1}\right)$.
אכן, $gxg^{-1}=hxh^{-1}\Leftrightarrow h^{-1}gxg^{-1}h=x\Leftrightarrow x=\left(h^{-1}g\right)x\left(h^{-1}g\right)^{-1}\Leftrightarrow\in h^{-1}g$
$Z_x\Leftrightarrow gZ_x=hZ_x\Leftrightarrow\varphi\left(gxg^{-1}\right)=\varphi\left(hxh^{-1}\right)$.

(ii) φ חח"ע: צ"ל $gxg^{-1}\neq hxh^{-1}\Leftarrow\varphi\left(gxg^{-1}\right)\neq\varphi\left(hxh^{-1}\right)$ שקול ל-$\varphi\left(gxg^{-1}\right)=$
$\varphi\left(hxh^{-1}\right)\Leftarrow gxg^{-1}=hxh^{-1}$.

$$\boxed{aH=bH\Leftrightarrow a^{-1}b\in H}$$

נותר להוכיח:

(iii) φ על: אכן לכל מחלקה שמאלית של Z_x ו-G קיים $g\in G$ כך שהמחלקה היא gZ_x, ואז gxg^{-1} מקור תחת φ, ז"א $\varphi\left(gxg^{-1}\right)=gZ_x$

פעולות של חבורות

הגדרה

פעולה של חבורה G על קבוצה X היא הומ' $\varphi:G\to S\left(X\right)$

הערה

ז"א, מתקיים לכל $g\in G$, $\varphi\left(g\right)$ תמורה מ-X לעצמו, ולכל $g,h\in G$ ו-$x\in X$ מתקיים $\varphi\left(gx\right)\left(x\right)=\varphi\left(g\right)\varphi\left(h\right)\left(x\right)$

דוגמאות

(1) $G=\mathbb{Z}_2$, $X=\mathbb{R}^2$, נגדיר $\begin{matrix}\varphi\left(0\right)\left(\left(x,y\right)\right)=\left(x,y\right)\\ \varphi\left(1\right)\left(\left(x,y\right)\right)=\left(y,x\right)\end{matrix}\ \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$

(2) $G=\mathbb{Z}_2$, $X=\mathbb{R}^3$, נגזיר $\psi:\mathbb{Z}_2\to S\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$\psi\left(1\right)\left(x,y,z\right)=\left(-x,y,z\right)$$

$$\psi\left(0\right)\left(x,y,z\right)=\left(x,y,z\right)$$

(3) $G=S_n$, נגדיר $\varphi\left(\pi\right)=\left(\left\{a_1,a_2,...a_k\right\}\right)=\left\{\pi\left(a_1\right),\pi\left(a_2\right),...\pi\left(a_k\right)\right\}$ כאשר X היא תת קבוצה מגודל k מתוך $\left\{1,2,...n\right\}$.
למשל $n=5$, $x=3$, $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\end{pmatrix}$, $\varphi\left(\pi\right)\left(x\right)=\left\{2,1,3\right\}$,
$m\left\{1,3,5\right\}=x\ni X$. $\varphi\left(\pi\right)$ תמורה ב-$S\left(X\right)$ ומתקיים $\varphi\left(\pi G\right)\left(x\right)=$ $\varphi\left(\pi\right)\varphi\left(G\right)\left(x\right)$

(4) $G=\mathbb{R}^*$, $X=\mathbb{R}^n$. נגדיר לכל $c\in\mathbb{R}^*$, $v\in\mathbb{R}^n$, $\varphi(c)(v)=cv$

$$\varphi(c_1c_2)(v)=c_1c_2v=v_1(c_2v)=\varphi(c_1)(c_2)(v)=\varphi(c_1)\varphi(c_2)(v)$$

וכן $\varphi(c)$ תמורה(כי $c\neq 0$)

(5) תהא G חבורה. H ת"ח של G. G פועלת על מחלקות שמאליות של H ע"י כפל משמאל. $X=\{xH:x\in G\}$, $\forall_{g\in G}\varphi(g)(xH)=gxH$

(6) תהא G חבורה, $X=G$

(א) G פועלת על $X=G$ ע"י $\varphi(g)(x):=x$ <u>פעולה טריוויאלית</u>.

(ב) G פועלת על $X=G$ ע"י כפל משמאל $\varphi(g)(x):=gx$ <u>פעולה רגולרית</u>.

(ג) G פועלת על $X=G$ ע"י הצמדה $\varphi(g)(x):=gxg^{-1}$

$$\varphi(gh)(x)=ghx(gh)^{-1}=ghxh^{-1}g^{-1}=g\left(hxh^{-1}\right)g=\varphi(g)\left(hxh^{-1}\right)=\varphi(g)\varphi(h)(x)$$

פועלת הצמדה

הערה

פעולה היא הכללה של הצמדה.

הגדרה - מסלול

תהא G חבורה, X קבוצה, $\varphi:G\to S(X)$ פעולה. מסלול של איבר $x\in X$ הוא $\sigma x:=\{\varphi(g)(x):g\in G\}$

דוגמאות

(1) $G=\mathbb{R}^*$ פועלת על מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ע"י $\varphi(c)(v):=cv$.
מסלולים: $\sigma\left(\vec{0}\right)=\left\{\vec{0}\right\}$. עבור $v\neq\vec{0}$:

$$\sigma(v)=\{cv:c\in\mathbb{R}^*\}=\operatorname{span}\{v\}\setminus\left\{\vec{0}\right\}$$

במקרה זה, X המישור, איחוד זר של המסלולים.

(2) $G=\mathbb{Z}_2$, $X=\mathbb{R}^2$, $\varphi(0)(x,y)=(x,y)$, $\varphi(1)(x,y)=(y,x)$. עבור $x\neq y$ $\sigma(x,y)=\{(x,y),(y,x)\}$. עבור נקודה על הישר $(y=x)$ $\sigma(x,x)=\{(x,x)\}$, שוב, X - המישור איחוד זר של מסלולים.

(3) מחלקות צמידות הם מסלולים תחת פעולת הצמדה.

(4) $G=S_n$, $X=\{(x,y):x,y\in\{1,2,...n\}\}$, פעולה $\varphi(r)(x,y)=(r(x),r(y))$
מסלולים: אם $x=y$:

$$\sigma(1,1)=\{(i,i):1\leq i\leq n\}$$

$$\sigma(1,2)=\{(i,j):i\neq j,1\leq j\leq n,1\leq j\leq n\}$$