מד"ר - תרגול 3

3.1 מד"ר מסדר 2 $F(x,y,y',y'')=0$

למדנו בהרצאה כיצד לפתור מד"ר מהצורה $F(y,y',y'')=0$ ע"י ההנחה $y'=P=P(y)$

$$y''(x)=\frac{dP(y)}{dx}=\frac{dP(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=P'(y)\cdot P$$

ואז מקבלים $F(y,P,P\cdot P')=$. זוהי מד"ר מסדר ראשון עבור $P(y)$.

דוגמאות

.1

פתור: $y''=y'\left(1+(y')^2\right)$

פתרון

נציב $\begin{matrix} y'=P \\ y''=PP' \end{matrix}$. אם $P=0$ אזי $PP'=P\left(1+P^2\right)$. נניח $P\neq0$ (כי $y'=0\Leftarrow y=C$) ונחלק בו:

$$P'=1+P^2$$

$$\frac{dP}{dY}=1+p^2$$

$$\frac{dP}{1+P^2}=dy$$

$$\arctan(P)=y+K$$

$$P=\tan(y+K)$$

כלומר

$$y'=\tan(y+c)$$

$$\frac{dy}{\tan(y+C)}=dx$$

$$\cot(y+C)\,dy=dx$$

$$\ln|\sin(y+C)| = x+K$$

$$|\sin(y+C)| = e^{x+K} = e^K e^x$$

$$\sin(y+C) = \pm e^K e^x$$

$$\sin(y+C) = Ae^x$$

$$y+C = \arccos(Ae^x)$$

$$y = \arcsin(Ae^x) - C$$

$$y = \arcsin(C_1 e^x) + C_2$$

נשים לב שניתן לקבל את הפתרונות הקבועים שמצאנו בהתחלה אם ניקח $C_1 = 0$.

כלל אצבע

כמו שבפתרון של מד"ר מסדר ראשון היה בד"כ קבוע C או K כך במד"ר מסדר 2 יהיו בד"כ 2 קבועים C_1, C_2(למעשה במד"ר "אבות" מסדר n, נצפה שיהיו n קבועים $C_1, ...C_n$ בפתרון).
למה הכוונה "אבות"? נתבונן במד"ר $y^2 + (y')^2 + (y'')^2 + (y''')^2 = 0$. זוהי מד"ר מסדר 3, אבל זהו סכום של ריבועים אי שליליים והפתרון היחיד הוא כאשר $y = y' = y'' = y''' = 0$ כלומר $\boxed{y(x) = 0}$ ואין שום קבוע חופשי.

לעומת זאת, במד"ר לינארית נורמלית מסדר n(שבה המקדם של $y^{(n)}$ הוא 1) הפתרון הכללי, אם קיים, מכיל בתוכו n קבועים חופשיים $C_1, ...C_n$

2

פתור $y \cdot y'' = 3 - (y')^2$

פתרון

$$y' = P$$

$$y'' = PP'$$

נקבל $y \cdot PP' = 3 - P^2$. לפני שנחלק ב$3 - p^2$, נשים לב שאם $3 - P^2 = 0$ כלומר $y' = \pm\sqrt{3}$ מתקבל פתרון. לעומת זאת $y = 0$ אינו פתרון.
מקבלים:

$$yP\frac{dP}{dy} = 3 - P^2$$

נפריד משתנים:

$$\frac{PdP}{3-P^2}=\frac{dy}{y}$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|3-P^2\right|=\ln|y|+C$$

$$\ln\left|3-P^2\right|=-2\ln|y|+A=\ln\left|y^{-2}\right|+A$$

$$\left|3-P^2\right|=e^{A+\ln\left|y^2\right|}=e^A\cdot\left|y^{-2}\right|$$

$$3-P^2=\pm y^{-2}$$

$$\left(y'\right)^2=P^2=3-Ky^{-2}=\frac{3y^2-K}{y^2}$$

$$y'=\pm\sqrt{\frac{3y^2-K}{y^2}}=\pm\frac{\sqrt{3y^2-K}}{|y|}=\pm\frac{\sqrt{3y^2-K}}{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{3y^2-K}}{y}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{3y^2-K}}=\pm dx$$

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3y^2-K}=\pm x+C$$

$$\sqrt{3y^2-K}=\pm 3x+A$$

$$3y^2-K=qx^2\pm 6A+A^2$$

$$3y^2=qx^2\pm 6A+A^2+K$$

$$y^2=3x^2\pm 2Ax+\frac{A^2}{3}+\tilde{K}$$

$$y^2=3x^2+2Bx+\frac{B^2}{3}+\frac{A^2}{K}=B^2$$

$$\begin{cases} 2B=C_1 \\ \dfrac{B^2}{3}+\tilde{K}=C_2 \end{cases}$$

$$y^2 = 3x^2 + C_1x + C_2$$

$$y = \pm\sqrt{3x^2 + C_1x + C_2}$$

3.2 מד"ר לינארית מסדר n

מד"ר לינארית מסדר n היא מד"ר מהצורה $a_n(x)\,y^{(n)} + ... + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x)$. היא נקראת בנוסף הומוגנית אם $b(x) = 0$, אחרת אי הומוגנית.

פתרון מד"ר לינארית הומוגנית(מל"ה)

כדי לפתור מד"ר לינארית הומוגנית כל שעלינו לעשות הוא למצוא n פתרונות <u>בת"ל</u> $y_1, ...y_n$ ואז הפתרון הכללי הוא צירוף לינארי שלהם:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

פונקציות $y_1, ...y_n$ נקראות בת"ל אם

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_I = 0 \Rightarrow \forall i\,(C_i = 0)$$

כיצד נוח לדעת בקלות האם $y_1, ...y_n$ בלתי תלויים לינארית? לפני שנענה על שאלה זו נביא כלל חשוב מלוגיקה:

טענה

אם A וB טענות כך ש$A \Rightarrow B$ אז $\neg B \Rightarrow \neg A$(הסימון $\neg$ נקרא "not" והוא השלילה של הטענה).

הוכחה

נניח שנכונות הטענה A גוררת את נכונות הטענה B, כלומר $A \Rightarrow B$ ונרצה להראות שאם B לא נכונה אז גם A לא נכונה. ובכן, אם B לא נכונה, לא ייתכן שA תהיה נכונה, כי לפי ההנחה אם A נכונה אז גם B נכונה.

דוגמה

ידוע שX עורב$\Leftarrow X$ שחור ולכן (X עורב)$\neg \Rightarrow$(X שחור)$\neg$. X לא שחור $\Leftarrow X$ לא עורב.

נחזור לשאלה של בדיקת תלות/אי תלות לינארית

לצורך כך ניזכר בהגדרת הוורונסקיאן:

הגדרה

בהנתן n פונקציות $y_1,...y_n$ המוגדרות וגזירות $n-1$ פעמים בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$ כלשהו הוורונסקיאן שלהן מוגדר להיות:

$$W\left(y_1,...y_n\right):=\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

סימון אחר הוא $W\left(y_1,...y_n\right)(x)$. כאן רואים בבירור שהוורונסקיאן הוא פונקציה של המשתנה x.

דוגמה

אם $\begin{matrix} y_1=x \\ y_2=x^2 \end{matrix}$ אזי $W\left(y_1,y_2\right)(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2=x^2$

מה טוב בוורונסקיאן?

אם הפונקציות ת"ל אזי הוורונסקיאן מתאפס: $y_1,...y_n$ ת"ל $\Leftarrow W\left(y_1,...y_n\right)\equiv 0$

ומכאן נובע $y_1,...y_n$ בת"ל $\Rightarrow W\left(y_1,...y_n\right)\not\equiv 0$

האם נכון לומר ש$W\left(y_1,...y_n\right)\equiv 0\Leftarrow y_1,...y_n$ ת"ל?

לא! לדוגמה $\begin{cases} y_1=x^3 \\ y_2=\left|x^3\right| \end{cases}$

למרות זאת, אם $y_1,...y_n$ הן לא סתם "פונקציות מהשכונה" אלא פתרונות עבור אותה מל"ה נורמלית, ניתן לומר ש$W\equiv 0\Leftarrow y_1,...y_n$ ת"ל

הערה

אם פונקציות בת"ל בקטע (a,b) אז הן גם בת"ל בכל קטע גדול יותר $(a,b)\supseteq(c,d)$.

הערה נוספת

אם נחליף את הסדר של הפונקציות בוורונסקיאן, נקבל אותה תוצאה עד כדי סימן $\pm$.

תרגיל

מצא את הפתרון הכללי עבור $y''+y=0$

פתרון לא נכון

ובכן, $y_1=\sin x$ פתרון וגם $y_2=2\in x$ פתרון ולכן הפתרון הכללי הוא $y=C_1y_1+C_2y_2$. הטעות היא ש$\sin x$ ו$2\sin x$ ת"ל לינארית(למעשה הפתרון כאן יצא $y=K\sin x$ וחסר קבוע שני)

פתרון

קל לקראות ש$y_1=\cos x, y_2=\sin x$ פתרונות של המד"ר הכללי הוא $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. הפעם הפתרונות בת"ל כי

$$W\left(y_1,y_2\right)=\left|\begin{array}{cc}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{array}\right|=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0$$

גם למד"ר מסדר גבוה ניתן לצרף תנאי התחלה, רק שהפעם משוואה אחת לא תספיק כדי למצוא n קבועים. לכן תהיינה משוואות נוספות.

דוגמה

פתור $\left\{\begin{array}{c}y''=0\\ y\left(1\right)=5\\ y'\left(1\right)=3\end{array}\right.$

פתרון

$y''=0 \Leftarrow y'=C_1 \Leftarrow y=C_1x+C_2$. לפי תנאי ההתחלה

$$y\left(1\right)=5\Rightarrow C_1\cdot 1+C_2=5\Rightarrow\boxed{C_1+C_2=5}$$

$$y'\left(1\right)=3\Rightarrow\boxed{C_1=3}$$

קיבלנו מערכת $\left\{\begin{array}{c}C_1+C_2=5\\ C_1=3\end{array}\right.$ שפתרונה $\begin{array}{c}C_1=3\\ C_2=2\end{array}$ ולכן הפתרון המבוקש הוא $\boxed{y=3x+2}$

דוגמה נוספת

הוכח שהפונקציות $y_1=x$, $y_2=x^3$ מקיימות את "משוואת אוילר" $x^2y''-3xy'+3y=0$ כאשר $x>0$ ואזינן ת"ל. מצא פתרון y_3 המקיים את תנאי ההתחלה:

$$\left\{\begin{array}{l}y_3\left(\pi\right)=2\pi^3\\ y_3'\left(\pi\right)=4\pi^2\end{array}\right.$$

פתרון

נבדוק האם $y_1=x$ פתרון, ע"י הצבה במד"ר:

$$x^2\left(x\right)''-3x\left(x\right)'+3\left(x\right)=0$$

$$-3x\cdot 1+3x=0$$

נבדוק עבור y_2:

$$x^2\left(x^3\right)^4-3x\left(x^3\right)'+3\left(x^3\right)\overset{?}{=}0$$

$$6x^3-9x^3+3x^3=0\checkmark$$

$$\left(6-9+3\right)x^3=0\checkmark$$

נתבונן בוורונסיקאן:

$$W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=...$$

הפתרון הכללי הוא לכן $\boxed{y=C_1x+C_2x^3}$. אם נשתמש בתנאי ההתחלה נקבל: $\begin{pmatrix}\pi & \pi^3\\ 1 & 3\pi^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\pi^3\\ 4\pi^2\end{pmatrix}$ שפתרונה $\begin{matrix}c_1=\pi^3\\ c_2=1\end{matrix}$ ולכן

$$\boxed{y_3=\pi^2x+x^3}$$

הורדת סדר

אם נתון פתרון y_0 למשוואה $\sum_{k=0}^{n}a_k\left(x\right)y^{(x)}=0$ נחפש פתרון ל$\sum_{k=0}^{n}a_k\left(x\right)y^{(x)}=b\left(x\right)$ מהצורה $y=y_0\left(x\right)\cdot z\left(x\right)$ ונקבל מד"ר מסדר $n-1$ עבור $w=z'$.

תרגיל

נתון פתרון $y_0\left(x\right)$ עבור המשוואה ההומוגנית <u>הקשורה</u> מצא את הפתרון הכללי

$$y''-4y'+3y=9e^{2x}$$

$$y_0=e^{3x}$$

פתרון

נציב במד"ר
$$\begin{cases}y=e^{3x}z\\ y'=3e^{2x}z+ze^{3x}z'\\ y''=9e^{3x}z+6e^{3x}z'+e^{3x}z''\end{cases}$$

$$9e^{3x}z+6e^{3x}z'+e^{3x}z''-12e^{3x}z-4e^{3x}z'+3e^{3x}z=9e^{2x}$$

$$e^{3x}z'' = 2e^{3x}z' = 9e^{2x}$$

נציב $w = z'$, $w' = z''$

$$e^{3x}w' + 2e^{3x}w = 9e^{2x}$$

מקבלים:

$$z' = w = C_1e^{-2x} + 9e^{-x}$$

$$z = \frac{C_1}{-2}e^{-2x} + \frac{9}{-1}e^{-x} + C_2$$

לסיכום

$$\boxed{y = ze^{3x} = Ae^{x} + Be^{3x} - 9e^{2x}}$$

הערה

זה עובד גם אם המשוואה הומוגנית.